

# الاحصاء التطبيقي

بنظام

# SPSS

الأستاذ

عزام عبد الرحمن صبري



الدار المنهجية  
للنشر والتوزيع

كتيب تربوية



Educational books

Telegram : [t.me/edubook](https://t.me/edubook)



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ

إِلَى عِلْمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُمْ بِمَا كُنْتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صَلَّى  
الْحَقُّ

الإحصاء التطبيقي

بنظام SPSS

# الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS

الأستاذ  
عزام عبد الرحمن صبري

الطبعة الأولى  
2015م - 1436هـ



الدار المنهجية  
للنشر والتوزيع



الدار المنهجية  
للنشر والتوزيع

رقم التصنيف: 519.50285

الإحصاء التطبيقي بنظام SPSS

أ. عزام عبد الرحمن صبري

الواصفات: الإحصاء الرياضي // الحواسيب /

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2014/10/4912)

رقم ISBN 978-9957-593-47-6

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الضحى التجاري

هاتف: +962 6 4611169 ص.ب. 922762 عمان - الأردن

DAR ALMANHAJIAH Publishing - Distributing

Tel: + 962 6 4611169 P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan

E-mail: info@almanhajiah.com

جميع الحقوق محفوظة للناشر. لا يسمح بإعادة إصدار الكتاب أو أي جزء منه أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات أو نقله بأي شكل من الأشكال دون إذن خطي من الناشر.

All rights Reserved. No part of this book may be reproduced. Stored in a retrieval system. Or transmitted in any form or by any means without prior written permission of the publisher.



# الفصل الأول

## مراجعة عامة

1-1 المجموعات	17
1-1-1 مفهوم المجموعة	17
1-1-2 المجموعات غير المنتهية	18
1-1-3 طرق وصف المجموعات	18
1-1-3-1 الطريقة الصريحة	18
1-1-3-2 الطريقة الضمنية	19
1-1-4 الانتماء وعدم الانتماء	19
1-1-5 المجموعتين	20
1-1-6 المجموعات الجزئية	20
1-1-7 العمليات على المجموعات	22
1-1-7-1 عملية الاتحاد	22
1-1-7-2 عملية التقاطع	23
1-1-7-3 الفرق بين المجموعات	23
1-1-10 المجموعات اللانهائية	26
1-1-10-1 المجموعات المحدودة	26
1-1-10-2 المجموعات المعدودة	27
1-1-10-3 مجموعات الأعداد غير المنتهية أو اللانهائية	27
1-2 مقاييس النزعة المركزية	29
1-2-1 الوسط الحسابي	29
1-2-2 الوسط الحسابي المرجح	37
1-2-3 خصائص الوسط الحسابي	38
1-3 مقاييس التشتت	41
1-3-1 المدى	41
1-3-2 نصف المدى الربعي وطرق إيجاده	43
1-3-3 الانحراف المتوسط	45
1-3-4 مفهوم التباين والانحراف المعياري	49



57	1-3-5 اثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري
58	1-3-6 العلامة المعيارية وكيفية إيجادها
62	1-3-7 التباين التجميعي والانحراف المعياري
64	1-3-8 المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر
65	1-3-9 أهمية تطبيق معامل الاختلاف
65	1-3-10 التعبير

## الفصل الثاني

### التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

73	2-1 التباديل
74	2-2 قاعدة الضرب
75	2-3 قاعدة الجمع
75	2-4 مضروب $n$
77	2-5 الترتيب الدائري
78	2-6 التوافيق
84	2-7 نظرية ذات الحدين

## الفصل الثالث

### الارتباط والانحدار

93	3-1 طريقة جداول الانتشار
94	3-2 معامل الارتباط وخصائصه
95	3-3 طرق إيجاد معامل الارتباط
95	3-3-1 معامل ارتباط بيرسون
98	3-3-2 إيجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري
98	3-3-3 معامل ارتباط سبيرمان للترتيب
102	3-4 مفهوم الانحدار
103	3-5 العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط
108	3-6 معامل الاقتران
109	3-7 معامل التوافق



113	o- الارتباط الجزئي والمتضاعف
114	1-8-3 الارتباط المتضاعف
117	2-8-3 الارتباط الجزئي

## الفصل الرابع

### نظرية الاحتمالات

127	1-4 الحادث العشوائي وتعريف الاحتمالات المختلفة
128	2-4 الفضاء العيني للتجربة
128	1-4-1 الفضاء العيني المنتهي
129	2-4-2 الفضاء العيني غير المنتهي
129	3-4 الأحداث وفضاء الأحداث
131	4-4 تعريف خاصة
131	5-4 النظريات المتعلقة بالاحتمالات
135	6-4 الحدث التام (الأكد)
136	7-4 الاحتمال الشرطي
138	8-4 الأحداث المستقلة
141	9-4 احتمال النتائج المتوقعة للفضاء العيني
142	10-4 قانون جمع الاحتمالات
143	11-4 صيغة بير

## الفصل الخامس

### المتغيرات العشوائية

#### ذات البعد الواحد

151	1-5 مقدمة
151	2-5 تعريف المتغير العشوائي
153	3-5 القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X
155	4-5 توقع دالة المتغير العشوائي



5-5	تباين المتغير العشوائي.....	156
5-6	المتغيرات العشوائية المنفصلة.....	159
5-6-1	تعريف للمتغير العشوائي المنفصل.....	159
5-6-2	تعريف الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل.....	159
5-7	المتغيرات العشوائية المتصلة.....	163
5-7-1	تعريف للمتغير العشوائي المتصل.....	163
5-7-2	الدالة الاحتمالية للمتغير المتصل (دالة الكثافة الاحتمالية).....	163
5-8	دوال التوزيع.....	166
5-8-1	تعريف دالة التوزيع.....	166
5-8-2	خواص دالة التوزيع.....	167
5-9	الاحتمالات المشروطة ودوال التوزيع لها.....	174
5-10	دوال التوزيع الاحتمالي والاحتمال للتحويل $Y=g(x)$ .....	176
5-10-1	التحويل في المتغيرات العشوائية المتصلة.....	176
5-10-2	التحويل في المتغيرات المنفصلة.....	180
5-10-3	دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي $Y=x^2$ .....	181

## الفصل السادس

### التوزيعات الاحتمالية الهامة

6-1	التوزيعات المنفصلة.....	189
6-1-1	توزيع بيرنولي.....	189
6-1-2	توزيع ذات الحدين.....	190
6-1-3	توزيع بواسون.....	191
6-1-4	التوزيع الهندسي.....	193
6-1-5	توزيع ذات الحدين السالب.....	195
6-1-6	التوزيع الهيرجيومتري.....	197
6-2	التوزيعات المتصلة.....	197
6-2-1	التوزيع الطبيعي.....	197



204	6-2-2 التوزيع المنتظم.....
206	6-2-3 التوزيع الأسّي.....
208	6-2-4 توزيع جاما.....
210	6-2-5 توزيع بيتا.....
211	6-2-6 توزيع كوشي.....

## الفصل السابع

### تقدير الفترات

217	7-1 فترات الثقة.....
217	7-2 فترات الثقة لوسط التوزيع الطبيعي.....
218	7-2-1 إذا كان حجم العينة كبيراً.....
220	7-2-2 إذا كان حجم العينة صغيراً.....
221	7-3 إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين.....
221	7-3-1 إذا كان حجم العينة كبيراً.....
222	7-3-2 إذا كان حجم العينة صغيراً.....
224	7-4 تكوين فترة الثقة للنسبة.....
225	7-5 إيجاد فترة الثقة للفرق بين نسبتيين.....
226	7-6 إيجاد فترة الثقة للتباينات.....

## الفصل الثامن

### اختبار الفرضيات

232	8-1 اختبار العلاقة بين متوسط عينة ومتوسط مجتمع.....
232	8-1-1 في حالة معلومية الانحراف المعياري للمجتمع وحجم العينة كبيراً.....
234	8-1-2 اختبار الوسط الحسابي عندما يكون الانحراف المعياري مجهولاً وحجم العينة صغيراً.....
234	8-2 اختبار الفرضيات للفرق بين الوسطين مع معلومية $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ .....
236	8-3 اختبار الفرضيات للفرق بين وسطين إذا كان $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ومجهولاً.....
237	8-4 اختبار الفرضية للنسبة.....
238	8-5 اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتيين.....



240	8-6 اختبار الفرضيات للتباين
240	8-6-1 اختبار التباين المساوي لقيمة معينة
241	8-6-2 اختبار الفرق بين تباينين

## الفصل التاسع

### تحليل التباين

245	9-1 مقدمة
246	9-2 التصنيف الأحادي
252	9-3 اختبار تساوي مختلف التباينات
254	9-4 التصنيف باتجاهين ومشاهدة واحدة في كل خلية
260	9-5 التصنيف باتجاهين لعدة مشاهدات في الخلية
268	9-6 مناقشة لتصميم التجارب

## الفصل العاشر

### تطبيقات الحاسوب

275	10-1 مقدمة
275	10-2 تشغيل البرنامج SPSS
276	10-3 شاشات SPSS
278	10-4 فتح ملف بيانات مخزن
279	10-5 إدخال بيانات
279	10-6 إدراج متغير (عمود)
279	10-7 إدراج صف (حالة)
280	10-8 تغيير اسم المتغير
281	10-8-1 تغيير النوع أو التنسيق الحالي
281	10-8-2 تحديد عنوان المتغير
283	10-8-3 تنسيق الأعمدة
284	10-9 تغيير نمط البيانات
284	10-10 حذف المتغير (العمود)
285	10-11 حذف الحالة (صف)



285	10-12	نقل أو نسخ خلية إلى خلية أخرى
285	10-13	إنشاء ملف بيانات
285	10-14	حفظ البيانات
285	10-15	الانتقال إلى مكان معين في شاشة محرر البيانات
286	10-16	فرز بيانات الصفوف
287	10-17	العمليات الحسابية
292	10-18	الارتباط
295	10-19	معادلة الانحدار الخطي
298	10-20	تحديد شكل الانتشار
299	10-21	إظهار خط الانحدار





## المقدمة

نظراً إلى أهمية الإحصاء التطبيقي كمادة تطبيقية في شتى المجالات تساعد متخذي القرارات في كيفية اتخاذ القرار باستخدام أحد الطرق الإحصائية، لذا ارتأينا أن يكون هناك تسلسل في اختيار فصول هذا الكتاب بحيث يكون هناك ترابط بين الفصول وبالتالي تكون هناك جدوى من تقديم هذا الكتاب للباحث ولتخذ القرار على حد سواء فقد تناولنا في الفصل الأول مراجعة عامة لنظرية المجموعات و مراجعة لطرق إيجاد الوسط الحسابي وطرق إيجاد التباين والتي سبق وأن تطرقنا لها في كتاب الإحصاء التطبيقي.

كذلك تناولنا في الفصل الثاني مبدأ العد وطرق الاختبار ونظرية ذات الحدين وذلك نظرياً لأهميتها في نظرية الاحتمالات.

أما الفصل الثالث فقد تناولنا مفهوم الارتباط والانحدار البسيط كمقدمة للارتباط الجزئي والمتضاعف والذي يسهم إسهاماً فعالاً في كثير من المجالات التحليلية أما الفصل الرابع والخامس فقد تناولنا نظرية الاحتمالات والمتغيرات العشوائية وتوقعاتها أما الفصل السادس فقد استعرضنا أهم التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها. وفي الفصل السابع تناولنا أهم الطرق لإيجاد فترات الثقة وتعتبر من أهم مرتكزات الإحصاء التطبيقي.

أما الفصل الثامن فقد تناولنا أهم اختبارات الفرضيات والتي تساعد متخذي أصحاب القرار في اتخاذ قراراتهم. أما الفصل التاسع فقد قدمنا موضوعاً هاماً من مواضيع التحليل الإحصائي وهو تحليل التباين.

أما الفصل العاشر فهو فصل يتعلق بالحاسوب وطرق استخدامه وحل بعض الطرق الإحصائية من خلاله. والله أسأل أن أكون قد وفقت في تقديم هذا الكتاب راجياً من الزملاء إبداء أي ملاحظات حتى نأخذ فيها في الطبقات القادمة وقبل الختام فإنه لا يسعني إلا أن أتقدم بالشكر الجزيل لكل من قدم ملاحظات وإلى كل من أسهم بإخراجه وأخص بالذكر فريق الصف المتكون من الأخوة سلام بولص وأحمد أديب منير الذين بذلوا جهوداً مضيئة لإخراجه.

والله ولي التوفيق !!!

المؤلف عزام عبد الرحمن صبري





# الفصل الأول

## مراجعة عامة





# الفصل الأول

## مراجعة عامة

### 1-1 المجموعات (Sets)

#### 1-1-1 مفهوم المجموعة

تعريف (1.1) : المجموعة ببساطة هي تجمع من أشياء مميزة عن بعضها ، هذه الأشياء قد نذكرها بأرقام مميزة عن بعضها أو غيرها من الأشياء الأخرى

ضمن حاصرتين (قوسين موزونين) على النحو : { } ، وتفصل عناصرها فواصل ويعبر عن اسمها برمز باستخدام أحد الحروف الأبجدية :  $x, y, a, b, \dots$

مثال (1-1) : المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل الأعداد الطبيعية التي تأخذ قيما أقل من 5.

الحل :  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  مجموعة منتهية لأن عناصرها تقف عند القيمة 4 .

مثال (1-2) : المطلوب كتابة مجموعة الأعداد الزوجية الطبيعية والتي تبدأ بالعدد 2 .

الحل :  $X = \{2, 4, 6, \dots\}$  وكما هو ملاحظ فإن هذه المجموعة غير منتهية لأنه لا يمكن حصر عدد عناصرها .

مثال (1-3) : المطلوب كتابة مجموعة أيام الأسبوع الرسمية .

الحل : {السبت ، الأحد ، الاثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة} وهذه مجموعة منتهية لأنه أمكن حصر عدد عناصرها .

مثال (1-4) : 1 - المطلوب تكوين خمس مجموعات منتهية .

2 - المطلوب تكوين خمس مجموعات غير منتهية .

الحل: 1 - المجموعات المنتهية (Finite Sets)

$$X=\{a,b,c,d\}$$

$Z=\{1,3,5,7\}$  للتعبير عن مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية :  $1 \leq x \leq 7$

$Y = \{ \text{ورقة ، كتاب ، قلم} \}$  للتعبير عن بعض الأدوات التي يستخدمها الطالب

$A = \{ \text{رياضيات ، فيزياء ، كيمياء} \}$  للتعبير عن المباحث العلمية .

$B = \{ \text{مربع ، مستطيل ، دائرة} \}$  للتعبير عن بعض الأشكال الهندسية .

(1-1-2) المجموعات غير المنتهية (Infinite Sets)

$X=\{1,3,5,7,9,\dots\}$  ، مجموعة الأعداد الفردية الطبيعية غير المنتهية.

$N^*=\{1,2,3,4,5,\dots\}$  ، للتعبير عن مجموعة الأعداد الطبيعية غير المنتهية .

مجموعة الأعداد الحقيقية  $R$  .

مجموعة الأعداد الصحيحة  $Z$  .

مجموعة الأعداد النسبية  $Q$  .

1-1-3 طرق وصف المجموعات :

1-1-3-1 الطريقة الصريحة: أي بذكر عناصر المجموعة بشكل واضح .

مثال: (1-5) المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل أسماء الجامعات الأردنية الحكومية وذلك بذكر عناصرها .

الحل: المجموعة المطلوبة

$A = \{ \text{الأردنية ، مؤتة ، اليرموك ، العلوم والتكنولوجيا ، آل البيت} \}$  .



1-1-3-2 الطريقة الضمنية : أي عدم ذكر عناصر المجموعة صراحة .  
 مثال (1-6): المطلوب كتابة المجموعة التي تمثل الأعداد الأولية الطبيعية وأقل من 20 وذلك بشكل ضمني أو وصفي .

الحل:  $\{x : x \text{ عدد أولي طبيعي أقل من عشرين} \} = Y$  أو بأسلوب آخر

$$Y = \{x : x \in \mathbb{N}^*, x < 20, x \text{ : عدد أولي} \}$$

#### 1-1-4 الأنتماء وعدم الأنتماء:

تعريف (1-2) : نقول للعنصر  $a$  بأنه ينتمي (Element of) للمجموعة  $X$  ، إذا كان العنصر  $a$  هو أحد عناصر المجموعة  $X$  ، وبشكل رموز نكتب  $a \in X$  .  
 وتقرأ  $a$  عنصر في  $X$  أو ينتمي إلى المجموعة وتقرأ  $a$  ليس عنصراً في  $X$  أو لا ينتمي إلى المجموعة  $X$  .

مثال (1-7): المطلوب وضع إشارة الأنتماء أو عدم الأنتماء في الفراغات التالية:

$$a \in \dots \{3, 5, a, 4\}$$

$$7 \notin \dots \{17, 3, 1, 27\}$$

$$13 \in \dots \{3, 1, 13, 43\}$$

حيث من الجدير بالملاحظة عدم أهمية ترتيب العناصر داخل المجموعة.

مثال (1-8) : ضع رمز الانتماء وعدم الانتماء في الفراغات التالية :

- 1) 3 ..... {3, 6, 2}
- 2) {5} ..... {5, 7, 2}
- 3) 0 ..... {1, 2, 9}
- 4) {7} ..... {1, 6, {7}}
- 5) 9 ..... {2, 7, 11, 99}

الحل :  $1 \in (1 \notin (2 \notin (3 \notin (4 \in (5 \notin$

1-1-5 : تساوي مجموعتين

**تعريف:** تتساوى المجموعتان  $A, B$  إذا كان لهما نفس عدد العناصر ولهما نفس العناصر وكانت كل من المجموعتين محتواة في الأخرى أي إذا كان

$$A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A=B$$

مثال (1-9) : هل المجموعتان  $B = \{4, 6, 8, 2\}$  ,  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  متساويتين.

الحل: المجموعتان  $A, B$  متساويتان لأن لهما نفس العناصر والعدد.

ملاحظة: المجموعات لا تسمح بتكرار العنصر داخلها ولا تهتم بترتيب العناصر .

مثال (1-10) : هل المجموعتان  $A = \{1, 7, 11\}$  ,  $B = \{11, 5, 7\}$  متساويتان .

الحل: ليس لهما نفس العناصر وعليه فإن  $A \neq B$  على الرغم من تساوي عدد العناصر.

1-1-6 : المجموعات الجزئية

**تعريف:** يقال للمجموعة  $A$  بأنها مجموعة جزئية ( أو محتواة ) في المجموعة  $B$  إذا كان كل عنصر في المجموعة  $A$  ينتمي للمجموعة  $B$  وسيرمز للاحتواء بالرمز  $\subset$  وعليه يمكن كتابة هذا التعريف بشكل رموز .

$$A \subset B \Rightarrow a \in A, a \in B$$

مثال (1-11) : لتكن المجموعتان  $A = \{2, 4, 6\}$  ،  $B = \{1, 5, 2, 4, 6\}$  فهل  $A \subset B$  .

الحل: نعم لأن كل عنصر في  $A$  هو عنصر في  $B$ .

مثال (1-12) : لتكن المجموعتان  $A = \{a, b, c, d\}$  ،  $B = \{a, c, e, d, f\}$  فهل  $A \subset B$  ؟

الحل: المجموعة  $A \not\subset B$  لأن العنصر  $b \in A$  لكن  $b \notin B$  .

ومن المفيد أن نعرف أنه لأي مجموعة فإنه يمكن إيجاد عدد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من القاعدة التالية

قاعدة : عدد المجموعات الجزئية  $= 2^n$  : عدد عناصر المجموعة الأصلية  $A$ .

ملاحظة: لا بد من التعرف على المصطلحات التالية حتى نستطيع استخدامها مستقبلاً.

\* سنرمز للرمز  $n(A)$  للدلالة على عدد عناصر المجموعة .

\* سنرمز للرمز  $q(A)$  : مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة  $A$ .

ونسمي  $q(A)$  بقوة المجموعة  $A$  .

\*  $n(q(A))$  : عدد المجموعات الجزئية للمجموعة .

مثال (1-13) : إذا كانت  $A = \emptyset$  فأوجد  $n(A)$  ،  $q(A)$  ،  $n(q(A))$

الحل:  $n(A) = 0$  لأن المجموعة  $A$  خالية من العناصر.

$$q(A) = \emptyset$$

$$n(q(A)) = 2^0 = 1$$

مثال (1-14) : إذا كانت  $A = \{2\}$  فأوجد  $n(A)$  ،  $q(A)$  ،  $n(q(A))$  .

$$n(A) = 1$$

الحل: نجد أولاً عدد عناصر المجموعة  $A$

$$q(A) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

المجموعات الجزئية للمجموعة  $A$

$$n(q(A)) = 2^1 = 2$$

عدد المجموعات الجزئية

مثال (1-15) : لتكن  $A = \{3, 5\}$  ، أوجد  $n(A)$  ،  $q(A)$  ،  $n(q(A))$

$$a) n(A) = 2$$

الحل: نجد عدد عناصر المجموعة

الأصلية

$$b) q(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$$

نجد المجموعات الجزئية للمجموعة  $A$

$$c) n(q(A)) = 2^2 = 4$$

نجد عدد المجموعات الجزئية



ملاحظة: (1)  $\emptyset \subset A$  كل مجموعة خالية مجموعة جزئية من أية مجموعة .

(2)  $A \subset A$  كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها

مثال (1-16): ضع اشارة  $\in, \notin, \subset, \supset, \subseteq, \supseteq$  في الفراغات التالية :

- 1)  $\{3\} \dots\dots\dots \{2,3,5\}$
- 2)  $\{5\} \dots\dots\dots \{2,4,\{5\},\{9\}, 7\}$
- 3)  $\emptyset \dots\dots\dots \{2,9,10\}$
- 4)  $\emptyset \dots\dots\dots \{\{0\}, 6,8\}$
- 5)  $0 \dots\dots\dots \{\{0\},3,7\}$

الحل:

$$1) \subset \quad 2) \in \quad 3) \subset \quad 4) \subset \quad 5) \notin$$

### 1-1-7 العمليات على المجموعات

كما أن هناك عمليات حسابية كالجمع والضرب الإعتيادي على الأعداد كذلك فإن هناك عمليات أخرى على المجموعات نسميها الإتحاد والتقاطع والطرح والتمم وإلى ما شابه ذلك من عمليات ، وسنتطرق إلى هذه العمليات بشيء من التفصيل وبالقدر الذي يتطلبه التحليل الرياضي .

#### 1-1-7-1 عملية الإتحاد

**تعريف :** أن عملية الإتحاد التي يرمز لها بالرموز  $\cup$  تتم بين مجموعتين أو أكثر وتعني عناصر المجموعتين المتحدتين ما عدا المتكرر منها وبشكل رموز،

$$a \in (A \cup B) \Leftrightarrow a \in A \text{ أو } a \in B$$

مثال (1-17) : لتكن  $A = \{3,7,4\}$  ,  $B = \{2,5,1\}$  والمطلوب إيجاد  $A \cup B$

الحل: إن ناتج الإتحاد هو

$$A \cup B = \{3,7,4,2,5,1\}$$

$$\text{ملاحظة: } A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A.$$

### 1-1-7-2 عملية التقاطع

تعريف : نقصد بعملية التقاطع اخذ العناصر المشتركة بين مجموعتين او أكثر . ويرمز لها بالرمز  $\cap$  وبشكل رموز يمكن كتابة ذلك على النحو:

$$a \in A \cap B \Rightarrow a \in A, a \in B$$

مثال (1-18) : لتكن  $A = \{4,7,9\}$  ،  $B = \{7,3,2\}$  أوجد  $A \cap B$

الحل: أن ناتج عملية التقاطع هو

$$A \cap B = \{7\}$$

### 1-1-7-3 طرح المجموعات

تعريف : نعي بطرح المجموعة B من المجموعة A هو أن نطرح من A العناصر المشتركة مع المجموعة B ويرمز له بشكل  $A/B$  او  $A-B$  ويمكن التعبير عنه بشكل رموز:

$$A-B = A - (A \cap B) \text{ أو } \bar{B} \cap A$$

$$\text{وكذلك } B-A = B - (A \cap B) \text{ أو } \bar{A} \cap B$$

مثال (1-19) : لتكن  $A = \{4,7,9,11\}$  ،  $B = \{5,2,9,10,11\}$

أوجد  $A-B$  ،  $B-A$

الحل: لايجاد  $A-B = A - (A \cap B)$  نجد أولاً

$$A \cap B = \{9,11\}$$

$$A-B = A - (A \cap B) = \{4,7,9,11\} - \{9,11\} = \{4,7\}$$

$$B-A = B - (A \cap B) = \{5,2,9,10,11\} - \{9,11\} = \{5,2,10\}$$

مثال (1-20) : لتكن  $A = \{x: x \in \mathbb{N}, 10\}$

$$B = \{x: x \text{ عدد فردي طبيعي } < 10\}$$

والمطلوب إيجاد  $A \cap B$  ،  $A \cup B$  ،  $A-B$  ،  $B-A$

الحل: نكون المجموعتين  $B, A$  بذكر عناصرهما

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A - B = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B - A = \{ \}$$

### 1-1-8 المجموعتان المنفصلتان

تعريف: يقال للمجموعتين  $B, A$  بأنهما منفصلتان إذا كان  $A \cap B = \emptyset$  أي لا يوجد عناصر مشتركة

مثال (1-21): لتكن  $A = \{4, 9, 11\}$ ,  $B = \{1, 5, 7\}$  فهل المجموعتان  $B, A$  منفصلتان؟

الحل: بما أن  $A \cap B = \emptyset$  ∴ فالمجموعتان منفصلتان.

### 1-1-9 المجموعة المتممة

تعريف: يقال للمجموعة  $\bar{A}$  بأنها متممة للمجموعة  $A$  بالنسبة للمجموعة  $U$  (المجموعة الكلية) إذا كان  $a \in A$  فإن  $a \notin \bar{A}$

وقبل إعطاء أمثلة على ذلك لا بد من ذكر الخصائص التالية:

$$1) A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$2) A \cup \bar{A} = U$$

$$3) \bar{A} \cap U = \bar{A}$$

$$4) A \cap U = A$$

$$5) A \cup U = U$$

$$6) \bar{A} \cup U = U$$

$$7) \bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}$$

$$8) U \cup \emptyset = U$$

$$9) U \cap \emptyset = \emptyset$$



قانونا ديمورجان 10)

$$a) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$b) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

مثال (1-22) : لتكن ،  $B = \{2, 8, 12, 18\}$  ،  $A = \{4, 6, 8, 10\}$

أوجد ما يلي  $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

- |                                |   |                                  |                          |
|--------------------------------|---|----------------------------------|--------------------------|
| 1) $A$                         | 2) $\overline{B}$                               | 3) $\overline{A} - \overline{B}$ | 4) $\overline{A \cup B}$ |
| 5) $\overline{A \cap B}$       | 6) $\overline{A \cap B}$                        | 7) $\overline{A} - \overline{B}$ | 8) $\overline{A} - B$    |
| 9) $(\overline{A \cup A}) - B$ | 10) $\overline{A \cap B} / \overline{A \cup B}$ |                                  |                          |

الحل:

- 1)  $\overline{A} = U - A = \{2, 12, 14, 16, 18\}$
- 2)  $\overline{B} = U - B = \{4, 6, 10, 14, 16\}$
- 3)  $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18\}$
- 4)  $\overline{A \cup B} = U - (A \cup B)$

نجد أولاً  $A \cup B = \{4, 6, 8, 10, 2, 12, 18\}$  ، ثم نجد المطلوب من السؤال

$$\overline{A \cup B} = \{14, 16\}$$

$$5) \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

من خصائص قانونا ديمورجان

$$A \cap B = \{8\}$$

نجد أولاً

$$\overline{A \cap B} = U - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$6) \overline{A \cap B} = \overline{A \cup B} = \{14, 16\}$$

$$7) \overline{A} - \overline{B} = \overline{A} - (\overline{A} \cap \overline{B}) = \{2, 12, 14, 16, 18\} - \{14, 16\} = \{2, 12, 18\}$$

$$8) \overline{A} - B = \{2, 12, 14, 16, 18\} - \{2, 8, 12, 18\} = \{14, 16\}$$

$$9) (\overline{A \cup A}) - A = \{2, 12, 14, 16, 18\} = \overline{A}$$

$$10) (\overline{A \cap B}) - (\overline{A \cup B}) = \{8\} - \{14, 16\} = \{8\}$$

## 1-1-10 المجموعات اللانهائية

### 1-1-10-1 المجموعات المحدودة

نبدأ بدراسة هذه المجموعات باعطاء التعريف التالي .

تعريف: اذا كانت  $A \subset \mathbb{R}$  تسمى  $A$  مجموعة محدودة من أعلى اذا وجد عدد مثل  $M$  بحيث ان  $A \leq M$  ونسمى  $M$  حدا اعلى للمجموعة  $A$  .

مثال (1-23) : لتكن المجموعة  $A=[2,7]$  اوجد الحد الأعلى لهذه المجموعة

الحل: نلاحظ أن  $A \leq 7 \forall a \in A$

$\therefore 7$  هو الحد الأعلى للمجموعة  $A$

تعريف: تسمى المجموعة  $A$  مجموعة محدودة اذا كانت محدودة من أسفل ومحدودة من أعلى

مثال (1-24) : لتكن  $A=[-2,7]$  فهل هذه المجموعة محدودة واذا كانت كذلك فأوجد حديها الأعلى والأسفل.

الحل: المجموعة محدودة لأن لها حد أدنى يساوي  $-2$  وحد أعلى يساوي  $7$

مثال (1-25) : لتكن  $A=[1, \infty)$  فهل المجموعة محدودة .

الحل : المجموعة  $A=[1, \infty)$  ليست محدودة لأنه لا يوجد لها حد أعلى إنما لها حد أدنى يساوي  $1$  .

مثال (1-26) : لتكن المجموعة  $B=(-\infty, 5)$  فهل المجموعة محدودة

الحل: المجموعة  $B$  ليست محدودة لأنه لا يوجد لها حد أدنى إنما لها حد أعلى هو  $5$

تعريف : لتكن  $A \subset \mathbb{R}$ ،  $b \in \mathbb{R}$  تسمى  $b$  بالحد الأعلى للمجموعة  $A$  اذا كان  $\forall a \in A, b \geq a$  تسمى اصغر حد اعلى للمجموعة .

مثال (1-27) : لتكن  $A=[-3,5]$  اوجد اصغر حد أعلى للمجموعة  $A$  .

الحل: نلاحظ ان 5 هو اصغر حد أعلى للمجموعة A لأن الأعداد 5,6,7 هي حدود عليا واصفها العدد 5

## 1-1-10-2 المجموعات المعدودة Countable Sets :

تعريف: اذا كانت المجموعة A مجموعة منتهية فإنه يمكن عد عناصرها . وتسمى المجموعة بالمجموعة المعدودة

تعريف: أما إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإنه لا يمكن عد عناصرها. ونسميها بمجموعات غير معدودة العناصر.

تعريف: اما إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإنه لا يمكن عد عناصرها، ونسميها بمجموعات غير معدودة العناصر.

مثال (1-28). : لتكن  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  فما عدد عناصر المجموعة A

الحل: عدد  $n = A$

ملاحظة : إذا كانت  $A = \emptyset$  فإن عدد عناصر المجموعة A صفرا

ملاحظة : جميع المجموعات  $N, N^*$  هي مجموعات جزئية من R وغير معدودة .

## 1-1-10-3 : مجموعات الأعداد غير المنتهية او اللانهائية

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية ويرمز لها بالرمز  $N^*$  حيث  $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

(2) مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر ويرمز لها بالرمز N

$$N = N^* \cup \{0\}$$

(3) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ويرمز لها بالرمز  $Z^+$

$$Z = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(4) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ويرمز لها بالرمز  $Z^-$

$$Z^- = \{\dots, -3, -2, -1, \dots\}$$

(5) مجموعة الأعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز  $Z$  تشمل مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة بالإضافة الى الصفر. أي

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\}$$

(6) مجموعة الأعداد النسبية الموجبة ويرمز لها بالرمز  $Q^+$

$$Q^+ = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \dots\}$$

(7) مجموعة الأعداد النسبية السالبة ويرمز لها بالرمز  $Q^-$

$$Q^- = \{\frac{-1}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{1}, \dots, \frac{-3}{2}, \dots\}$$

(8) مجموعة الأعداد النسبة

$$Q = \{\frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots\}$$

$$Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$$

(9) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ويرمز لها

$$R^+ = \bar{Q}^+ \cup Q^+ \text{ (حيث } \bar{Q}^+ \text{ مجموعة الأعداد غير النسبية الموجبة).}$$

$$R^+ = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \dots, \frac{2}{3}, \dots\}$$

(10) مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة ويرمز لها بالرمز وبالتالي

$$R^- = \bar{Q}^- \cup Q^-$$

$$R^- = \{\dots, \frac{-4}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{1}, \frac{-1}{1}, \dots\}$$

(11) مجموعة الأعداد الحقيقية

$$R = R^- \cup R^+ \cup \{0\}$$

كذلك كل المجموعات الناتجة عن هذه المجموعات كمجموعة الأعداد الفردية الطبيعية والزوجية الطبيعية وكل مجموعة ليس لها حد أدنى أو أعلى أو غير محدودة.



## 1-2 مقاييس النزعة المركزية

أن كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمرکز والتكثف نحو رقم معين وهذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هذه القيمة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثو الإحصاء العديد من هذه المقاييس أهمها:

(1) الوسط الحسابي (2) الوسيط (3) المنوال (4) الوسط الهندسي (5) الوسط التوافقي (6) الوسط التربيعي.

هذا وسنتناول كل مقياس على إحدى بنوع من التفصيل من حيث الخصائص وطرق إيجاده.

### 1-2-1 الوسط الحسابي:

تعريف : الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \quad \dots\dots\dots (1 - 1)$$

كيفية إيجاد الوسط الحسابي :

a- إذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

1) البيانات غير مبوبة ومفردة (غير متكررة).

تعريف : إذا كان لدينا قيم المشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  فإن الوسط الحسابي لهذه المشاهدات  $\bar{x}$  هو

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \dots\dots\dots (1-2)$$

إن باستخدام رمز المجموع فأتينا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \dots\dots\dots (1-3)$$

### مثال (1-29)

إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

21, 13, 11, 7, 5, 3 والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

**الحل :** باستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$\bar{x} = \frac{21+13+11+7+5+3}{6} = \frac{60}{6} = 10 \quad \text{مثال (1-30)}$$

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات 84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

**الحل :** من العلاقة الوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$84 = \frac{420}{n} \Rightarrow n = \frac{420}{84} = 5$$

(2) إذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فأننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون أو المرجح)

**تعريف :** إذا كان لدينا قيم المشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  وتكراراتها المقابلة على التوالي  $f_1, f_2, \dots, f_n$  فإن الوسط الحسابي يكون

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} \quad (1-4)$$

أو باستخدام صيغة لمجموع

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (1-5)$$

مثال (1-31): في شعبة إدارة الأعمال أعطى مائة طالب امتحان إحصاء من عشر علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (1-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (1 - 1)

المطلوب: أيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.  
الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل إما بتكوين جدول الحل (2 - 1) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار $f_i$	العلامة $x_i$	$x_i \cdot f_i$
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

$$\bar{x} = \frac{733}{100} = 7.33 \quad \text{ثم نجد}$$

أو نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \quad \dots\dots\dots (1-6)$$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2 \times 8 + 8 \times 5 + 13 \times 6 + 35 \times 7 + 21 \times 8 + 16 \times 9 + 5 \times 10}{2 + 8 + 13 + 35 + 21 + 16 + 5} \\ &= \frac{8 + 40 + 78 + 245 + 168 + 144 + 50}{100} = \frac{733}{100} = 7.33 \end{aligned}$$

b - إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:  
هناك عدة طرق لإيجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا أهم الطرق المستخدمة.

1) طريقة استخدام التكرارات ومراكز الفئات أو طريقة القانون العام: في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات  $x_i$ .
- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي  $x_i \cdot f_i$ .
- نجد مجموع التكرارات أي  $f_i$ .
- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \dots\dots\dots (1-7)$$

مثال (1-32)

أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (1-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	24-20	29-25	34-30	39-35	44-40	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (1-3)

الحل: ينشك الجدول (1-4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار $f_i$	مراكز الفئات $x_i$	$x_i \cdot f_i$
24-20	7	22	$154=22 \times 7$
29-25	13	27	$351=27 \times 13$
34-30	21	32	$672=32 \times 21$
39-35	6	37	$222=37 \times 6$
44-40	3	42	$126=42 \times 3$
المجموع	50		1525

جدول (1-4)



ومن العلاقة نقسم مجموع حاصل الضرب على مجموع التكرارات.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{1525}{50} = 30.5 \text{ فالتنا نجد ان}$$

(2) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي:  
لإيجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات  $x_i$
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز (a).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز  $d_i$

- نجد مجموع حاصل الضرب أي  $\sum_{i=1}^n x_i f_i$

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \dots\dots\dots (1-8)$$

مثال (1-33)

: إذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (1-5):

الفئات	-30	-40	-50	-60	-70	المجموع
للتكرار	2	9	21	11	7	50

جدول (1-5)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (1-6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات:

الفئات	التكرار $f_i$	مراكز الفئات $x_i$	$d_i = x_i - a$	$d_i \cdot f_i$
-30	2	35	20 = 55 - 35	40 = 20 × 2
-40	9	45	10 = 55 - 45	90 = 10 × 9
-50	21	55	0 = 55 - 55	0 = 0 × 21
-60	11	65	10 = 55 - 65	110 = 10 × 11
-70	7	75	20 = 55 - 75	140 = 20 × 7
المجموع	50			120

جدول (1-6)

وليكن الوسط الفرضي  $a = 55$  وباستخدام العلاقة أدناه فإن:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$= 55 + \frac{120}{50} = 55 + 24 = 57.4$$

(3) إيجاد المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

ولإيجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات  $x_i$
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للأكثر تكراراً من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي  $d_i$

- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن  $d_i' = \frac{d_i}{l}$

- نجد حاصل ضرب  $d_i' \cdot x_i \cdot f_i$
- نجد مجموع حاصل ضرب  $d_i' \cdot f_i$
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i' \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \times l \quad \dots \dots \dots (1-9)$$

مثال (1-34) البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين في الجدول (1-7).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (1-7)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.  
الحل : نكون الجدول (1-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار $f_i$	مراكز الفئات $x_i$	الانحرافات عن الوسط الفرضي $d_i$	الانحرافات المختصرة $d_i'$	$d_i' \cdot f_i$
54-50	7	52	$10 = 62 - 52$	$2 = \frac{10-}{5}$	$14 = 2 \times 7$
59-55	13	57	$5 = 62 - 57$	$1 = \frac{5-}{5}$	$13 = 1 \times 13$
64-60	25	62	$0 = 62 - 62$	$0 = \frac{0}{5}$	$0 = 0 \times 25$
69-65	3	67	$5 = 62 - 67$	$1 = \frac{5}{5}$	$3 = 1 \times 3$
74-70	2	72	$10 = 62 - 72$	$2 = \frac{10}{5}$	$4 = 2 \times 2$
المجموع	50				20-

جدول (1-8)

وليكن الوسط الفرضي  $a=62$

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i' \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \times l$$

وبتطبيق العلاقة نجد أن

$$= 62 - \frac{20}{50} \times 5 = 62 - 2 = 60$$

مثال (1-35) البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (1-9):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (1-9)

المطلوب إيجاد:

(أ) للوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

(ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

(ج) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل تكون الجدول (1-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار $f_i$	مراكز الفئات $x_i$	$x_i \cdot f_i$	$d_i = x_i - a$	$d_i \cdot f_i$	$d_i' = d_i / h$	$d_i' \cdot f_i$
-30	7	32.5	227.5	$10 = 42.5 - 32.5$	$70 = 10 \times 7$	$2 = \frac{10 -}{5}$	$14 = 2 \times 7$
-35	17	37.5	637.5	$5 = 42.5 - 37.5$	$85 = 5 \times 17$	$1 = \frac{5 -}{5}$	$17 = 1 \times 17$
-40	36	42.5	1530	$0 = 42.5 - 42.5$	$0 = 0 \times 36$	$0 = \frac{0 -}{5}$	$0 = 0 \times 36$
-45	29	47.5	1377.5	$5 = 42.5 - 47.5$	$145 = 5 \times 29$	$1 = \frac{5 -}{5}$	$29 = 1 \times 29$
-50	11	52.5	577.5	$10 = 42.5 - 52.5$	$110 = 10 \times 11$	$2 = \frac{10 -}{5}$	$22 = 2 \times 11$
المجموع	100		4350		100		20

جدول (1-10)

ليكن الوسط الفرضي  $a = 42.5$

(أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \text{من العلاقة}$$

$$\bar{x} = \frac{100}{100} + 42.5 = 1 + 42.5 = 43.5$$

ج) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^n d_i' f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} * l \quad \text{من العلاقة:}$$

$$\bar{x} = 42.5 + \frac{20}{100} * 5 = 1 + 42.5 = 43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

## 2 - 2 - 1) الوسط الحسابي المرجح:

لعل هذا المفهوم ينفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عناصر مختلفة ولا بد من التوقف عند هذا المفهوم لننتاول هذا التعريف.

تعريف: إذا كان لدينا مجموعات من المشاهدات معروفة  $n_1, n_2, \dots, n_m$  وقمنا بعملية دمج مجموعات المشاهدات المختلفة وأردنا إيجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج فائنا نجد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \dots + \bar{x}_m n_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}$$

## مثال (1-36)

إذا كان لدينا ثلاثة عينات أحجامها على التوالي  $n_1=15, n_2=20, n_3=25$  وكانت أوساطها الحسابية  $\bar{x}_1=45, \bar{x}_2=75, \bar{x}_3=60$  ودمجت المجموعات الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للمجموعات بعد الدمج.



$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\bar{x}_1 n_1 + \bar{x}_2 n_2 + \dots + \bar{x}_n n_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} \\ &= \frac{60 * 25 + 75 * 20 + 45 * 15}{25 + 20 + 15} \\ &= \frac{1500 + 1500 + 675}{60} = \frac{3675}{60} = 61.25\end{aligned}$$

الحل:

### 3 - 2 - 1 خصائص الوسط الحسابي :

1/ مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي = صفر.  
مثال (1-37) إذا كان لدينا قيم المشاهدات 17، 21، 15، 27، 20 أثبت أن مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفرًا.

الحل : نجد الوسط الحسابي  $\bar{x} = \frac{17 + 21 + 15 + 27 + 20}{5} = \frac{100}{5} = 20$   
نجد الانحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 17 - 20 = -3$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 21 - 20 = 1$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 15 - 20 = -5$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 27 - 20 = 7$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 20 - 20 = 0$$

$$\sum d_i = -3 + 1 - 5 + 7 = 0$$

وهذا ما يؤكد صحة الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

### 2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال (1-38)

نوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية 2500، 40، 50، 13، 37.

الحل :  $\bar{x} = \frac{2500 + 40 + 50 + 13 + 37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ أن الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال (1-39) اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

$$\bar{x} = \frac{40+50+13+37}{4} = \frac{140}{4} = 35 \quad \text{الحل :}$$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.  
(3) ياخذ كل قيم المشاهدات في الاعتبار من العلاقة:  
وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{مثال (1-40) (1-10)}$$

اوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان احصاء كانت كما يلي

9،6،0،8،7

$$\bar{x} = \frac{9+6+0+8+7}{5} = \frac{30}{5} = 6 \quad \text{الحل نجد}$$

(4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لترتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

(5) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها اقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة اخرى.

مثال (1-41) (أ) اوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 9،13،3،5،10 ثم اوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية اعلاه.

$$\bar{x} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8 \quad \text{الحل: نجد}$$

نجد:

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 3 - 8 = -5 \quad d_1^2 = 25$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \quad d_2^2 = 9$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 9 - 8 = 1 \quad d_3^2 = 1$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 13 - 8 = 5 \quad d_4^2 = 25$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 10 - 8 = 2 \quad d_5^2 = 4$$

$$\sum d_i^2 = 25 + 9 + 1 + 25 + 4 = 64$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن المشاهدة 13

$$d_1 = x_1 - 13 = 3 - 13 = -10 \quad d_1^2 = 100$$

$$d_2 = x_2 - 13 = 5 - 13 = -8 \quad d_2^2 = 64$$

$$d_3 = x_3 - 13 = 9 - 13 = -4 \quad d_3^2 = 16$$

$$d_4 = x_4 - 13 = 13 - 13 = 0 \quad d_4^2 = 0$$

$$d_5 = x_5 - 13 = 10 - 13 = -3 \quad d_5^2 = 9$$

$$\sum d_i^2 = 150$$

نلاحظ أن مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي أقل من مجموع انحرافات القيم عن أية قيمة أخرى لأن  $150 > 64$ .

(5) عند إضافة عدد ثابت إلى جميع قيم المشاهدات فأنتنا نضيف هذه العدد إلى الوسط الحسابي.

(6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فأنتنا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

### 3-1 مقاييس التشتت ..

**تعريف:** التشتت هو تباعد القيم عن بعضها البعض او عن نقطة معينة. لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض اوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات متبعثرة.

- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير متبعثرة.

- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لا يوجد تشتت

### مقاييس التشتت

لعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

3-1-1 المدى: يعتبر المدى من المقاييس التي يسهل حسابها ومنها

(أ) المدى للبيانات غير الميوية : وهو أبسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة. ويمكن ايجاده من العلاقات التالية:

$$\text{المدى} = \text{اكبر قيمة} - \text{اصغر قيمة} \dots\dots\dots (1-11)$$

**ملاحظة:** قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيراً وبما ان المدى يعتمد على اكبر واصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيراً. لذا ينصح بحذف القيم المتطرفة الصغرى والكبرى. عن طريق استخدام مفاهيم عدة منها:

(1) المدى المنيني = المنين الاعلى - المنين الادنى

$$= p_{99} - p_1 = \text{المئين التاسع والتسعون} - \text{المئين الأول}$$

(1-11)

$$(2) \text{ نصف المدى المئيني} = \frac{\text{المئين التاسع والتسعون} - \text{المئين الأول}}{2} = \frac{p_{99} - p_1}{2} \quad (2-3) \dots$$

$$(3) \text{ المدى العشري} = \text{العشير التاسع} - \text{العشير الأول}$$

(1-12) .....

$$D_9 - D_1 = P_{90} - P_{10}$$

$$(4) \text{ نصف المدى العشري} = \frac{\text{العشير التاسع} - \text{العشير الأول}}{2} \quad (1-13) \dots$$

$$(1-14) \dots \dots \dots \frac{P_{90} - P_{10}}{2} = \text{نصف المدى العشري}$$

$$(5) \text{ المدى الربيعي} = \text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}$$

(1-15)

$$\dots \dots \dots Q_3 - Q_1 = P_{75} - P_{25}$$

$$(6) \text{ نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} \quad (1-16) \dots$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{P_{75} - P_{25}}{2}$$

مثال (1-42) لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 كما يلي:

37, 28, 22, 39, 41, 21, 27, 34, 43, 25

والمطلوب إيجاد

(1) المدى المطلق (2) نصف المدى الربيعي

الحل : لإيجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً

21	22	25	27	28	34	37	39	41	43
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

(1) المدى المطلق = أعلى مشاهدة - أصغر مشاهدة

$$= 43 - 21 = 22$$



(2) لإيجاد نصف المدى الربيعي.

(أ) نجد الربع الأدنى أو  $P_{25}$  كما يلي :

- نجد ترتيب الربع الأدنى من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الربع الأدنى} = \frac{25}{100} (1+10) = \frac{275}{100} = 2.75$$

- نجد موقع ترتيب الربع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22، 25 تكون قيمة الربع

$$\text{الأول} = \frac{1}{2} (25 + 22) = 23.5$$

(2) لإيجاد الربع الأعلى أو  $P_{75}$  باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربع الأعلى من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربع الأعلى} = \frac{75}{100} (1+10) = \frac{825}{100} = 8.25$$

- نجد موقع الترتيب من بين الترتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

- فيكون قيمة الربع الأعلى هي  $\frac{1}{2} (41 + 39) = 40$

$$\text{إيجاد نصف المدى الربيعي نجده من} \quad \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{40 - 23.5}{2} = \frac{16.5}{2} = 8.25$$

(ب) إيجاد المدى المطلق من البيانات المبوبة نتبع ما يلي

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

$$\text{المدى المطلق} = \text{الحد الفعلي للفئة العليا} - \text{الحد الأدنى للفئة الدنيا} \dots\dots (1-17)$$

$$\text{المدى المطلق} = \text{مركز الفئة العليا} - \text{مركز الفئة الدنيا} \dots\dots (1-18)$$

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت له فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستركز دراستنا على نوع منها

2-3-1 نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربع الأعلى} - \text{الربع الأدنى}}{2} \dots\dots (1-19)$$

مثال (1-43): البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية لـ 60 موظفا يعملون في احد المؤسسات مبنوية كما في الجدول (1-11)

فئات الرواتب	-90	-100	-110	-120	-130	-140	-150	المجموع
	99	109	119	129	139	149	159	
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (1-11)

المطلوب: (أ) إيجاد المدى المطلق (ب) إيجاد نصف المدى الربيعي  
الحل: نكون جدول لحل (1-12)

فئات الرواتب	عدد الموظفين	الحدود الفئوية	الحد الاعلى الفئوي	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة $X_i$
99-100	5	99.5-89.5	$99.5 >$	5	94.5
109-110	9	109.5-99.5	$109.5 >$	14	104.5
119-120	11	119.5-109.5	$119.5 >$	25	114.5
129-130	17	129.5-119.5	$129.5 >$	42	124.5
139-140	11	139.5-129.5	$139.5 >$	53	134.5
149-150	5	149.5-139.5	$149.5 >$	58	144.5
159-160	2	159.5-149.5	$159.5 >$	60	154.5
المجموع	60				

جدول (1-12)

المدى المطلق = الحد الاعلى للفئة العليا - الحد الادنى للفئة الدنيا

$$159.5 - 89.5$$

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

$$60 = 154.5 - 94.5 =$$

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

الربيع الثالث - الربيع الأول

$$\frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{2} =$$

(1) نجد الربيع الاول بالخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاول وهو

$$\frac{60 \times 25}{100} = 15$$

ترتيب الربيع الاول

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.  
- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تحصر السهم.

وهي : 109.5-119.5

- نجد الحد الأدنى = 109.5.

- نجد الربيع الأدنى من العلاقة التالية.

$$Q_1 = 109.5 + \frac{15 - 14}{25 - 14} \times 10 = 109.5 + \frac{10}{11} = 110.4 = \text{الربيع الأدنى}$$

(2) نجد الربيع الثالث باتباع التالي

- نجد ترتيب الربيع الثالث كما يلي

$$= 60 \times \frac{75}{100} = 45$$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

وهي : 129.5-139.5

= نجد حدها الأدنى = 129.5

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

$$Q_3 = 129.5 + \frac{45 - 42}{53 - 42} \times 10 = \text{الربيع الثالث}$$

$$= 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23$$

$$\frac{132.23 - 110.40}{2} = 10.915 = \text{نصف المدى الربيعي}$$

### 3-3-1 الانحراف المتوسط:

**تعريف:** الانحراف المتوسط هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي ولايجاد الانحراف المتوسط.

أ- للبيانات غير المبوبة

نتبع الخطوات التالية:

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات
- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة:

$$|d_i| = |x_i - \bar{x}|$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

حيث n عدد المشاهدات

مثال(1-44): أوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

7,13,16,14,10

الحل: لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{x} = \frac{7+13+16+14+10}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|d_1| = |x_1 - \bar{x}| = |7 - 12| = 5$$

$$|d_2| = |x_2 - \bar{x}| = |13 - 12| = 1$$

$$|d_3| = |x_3 - \bar{x}| = |16 - 12| = 4$$

$$|d_4| = |x_4 - \bar{x}| = |14 - 12| = 2$$

$$|d_5| = |x_5 - \bar{x}| = |10 - 12| = 2$$

$$M.D = \frac{5+1+4+4+2}{5} = \frac{16}{5} = 3.2 \text{ فيكون}$$

مثال(1-45): لدينا قيم المشاهدات التالية

7,13,12,8,10

المطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه المشاهدات

الحل:- نجد أولاً الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{7+13+12+8+10}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

- نجد الانحرافات عن الوسط الحسابي ثم القيمة المطلقة والمجموع ونطبق العلاقة الواردة في المثال السابق.

بـ إذا كانت البيانات مبوبة  
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة التالية

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(f_i)}{\sum_{i=1}^n f_i} \dots (1-20)$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات من العلاقة  $|d_i| = |x_i - \bar{x}|$

- نجد حاصل ضرب  $|d_i| \cdot f_i$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n |d_i| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \dots (1-21)$$

مثال (1-46) : البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مبوبة كما في الجدول (1-13)

فئات الاوزان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (1-13)

والمطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه الاوزان

الحل: نكون الجدول (1-14) لتألي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الاوزان	$f_i$	$x_i$	$x_i f_i$	$ d_i $	$ d_i  f_i$
-40	7	42.5	297.5	11.15	78.05
-45	18	47.5	855	6.15	110.7
-50	40	52.5	2100	1.15	46
-55	20	57.5	1150	3.87	77
-60	10	62.5	625	8.85	88.5
70-65	5	67.5	337.5	13.85	69.25
المجموع	100		5365		469.5

جدول (1-14)

- نجد  $\bar{x}$  من العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(f_i)}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{5365}{100} = 53.65$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |d_i| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{469.5}{100} = 4.695$$

مثال (1-47): اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية والمبوبة بالجدول (1-15)

فئات الأجور	-40	-50	-60	-70	90-80	المجموع
التكرار	10	20	50	5	15	100

جدول (1-15)

الحل: نكون جدول الحل (1-16)

فئات الاجور	التكرار f	$x_i$	$x_i f_i$	$ d_i $	$ d_i  \cdot f_i$
-40	10	45	450	19.5	195
-50	20	55	1100	9.5	190
-60	50	65	3250	.5	25
-70	5	75	375	10.5	52.5
90-80	15	85	1275	20.5	307.5
	100		6450		770

جدول (1-16)

نبدأ بإيجاد الوسط الحسابي  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{6450}{100} = 64.5$$

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 45 - 64.5 = -19.5, |d_1| = 19.5$$

$$d_2 = 55 - 64.0 = -9.5, |d_2| = 9.5$$

$$d_3 = 65 - 64.5 = 0.5, |d_3| = 0.5$$

$$d_4 = 75 - 64.5 = 10.5, |d_4| = 10.5$$

$$d_5 = 85 - 64.5 = 20.5, |d_5| = 20.5$$

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n |d_i| \cdot f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{770}{100} = 7.7$$

#### 3-4-1 مفهوم التباين والانحراف المعياري:

**تعريف:** التباين: هو مجموع مربعات الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة للتباين.

**تعريف:** الانحراف المعياري: هو الجذر التربيعي للتباين.

ولإيجاد التباين والانحراف المعياري.

أ- إذا كانت البيانات غير مبوبة:

نتبع الخطوات التالية.



- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي ومربعاتها.

$$d_1 = x_1 - \bar{x}, d_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x}, d_2^2 = (x_2 - \bar{x})^2$$

$$\vdots \vdots \vdots \vdots \vdots$$

$$d_n = x_n - \bar{x}, d_n^2 = (x_n - \bar{x})^2$$

- نجد التباين من العلاقة التالية.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n} \quad \dots\dots (1-22)$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية.

إذا كان حجم العينة صغيراً

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}}$$

أما إذا كان حجم العينة كبيراً ويقترب من حجم المجتمع فإن

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n} \quad \dots\dots (1-23)$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الصغير.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}} \quad \dots\dots (1-24)$$

والمقصود بحجم العينة أو المجتمع صغيراً إذا كانت  $n < 30$  ويكون كبيراً إذا كانت  $n \geq 30$ .

مثال (1-48) : أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية:

3,7,11,14,5

الحل: لإيجاد التباين والانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية.

$$\bar{x} = \frac{3+7+11+14+5}{5} = \frac{40}{5} = 8 \quad \text{نجد}$$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن المتوسط الحسابي

$$d_1 = x_1 - \bar{x} = 3 - 8 = -5, d_1^2 = 25$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x} = 7 - 8 = -1, d_2^2 = 1$$

$$d_3 = x_3 - \bar{x} = 11 - 8 = 3, d_3^2 = 9$$

$$d_4 = x_4 - \bar{x} = 14 - 8 = 6, d_4^2 = 36$$

$$d_5 = x_5 - \bar{x} = 5 - 8 = -3, d_5^2 = 9$$

نجد التباين من العلاقة.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n} = \frac{25+1+9+36+9}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

و لإيجاد قيمة الانحراف المعياري فيكون:  $Sx = \sqrt{16} = 4$

ب) إذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لإيجاد التباين والانحراف المعياري نذكر أهمها:

1) الطريقة المطولة (طريقة القانون العام)

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(f_i)}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي ومربعاتها على النحو التالي:

$$d_1 = x_1 - \bar{x}, d_1^2 = (x_1 - \bar{x})^2$$

$$d_2 = x_2 - \bar{x}, d_2^2 = (x_2 - \bar{x})^2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$d_n = x_n - \bar{x}, d_n^2 = (x_n - \bar{x})^2$$

- نجد مربعات الانحرافات

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد

$$d_1^2 \cdot f_1, d_2^2 \cdot f_2, \dots, d_n^2 \cdot f_n$$

- نجد التباين من العلاقة

$$S_x^2 = \frac{d_1^2 \cdot f_1 + d_2^2 \cdot f_2 + \dots + d_n^2 \cdot f_n}{d_1 + d_2 + \dots + d_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \dots (1-25)$$

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}} \quad \dots (1-26)$$

مثال (1-49): الجدول التالي يمثل رواتب مئة موظف في إحدى الشركات مبوبة كما في الجدول (1-17)

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (1-17)

والمطلوب إيجاد الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول (1-18) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار $f_i$	مركز الفئات $x_i$	$x_i f_i$	$D_i = x_i - \bar{x}$	$d_i^2$	$d_i^2 f_i$
79-70	5	74.5	372.5	30.3	918.19	4590.45
89-80	7	84.5	591.5	20.3	412.09	2890.3
99-90	21	94.5	1984.5	10.3	106.09	2227.89
109-100	33	104.5	3448.5	0.3	0.09	0002.97
119-110	18	114.5	2061.0	9.7	94.09	1693.63
129-120	13	124.5	1618.5	19.7	388.09	5045.17
139-130	3	134.5	403.5	29.7	882.09	2646.27
	100		10480			19096.67

جدول (1-18)

نجد المتوسط الحسابي:  $\bar{x} = \frac{10480}{100} = 104.8$

نجد التباين من العلاقة

$$S_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{19096.67}{100-1} = \frac{19096.67}{99} = 192.9$$

$$S = \sqrt{s^2} = \sqrt{192.9} = 13.89$$

2- إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري: باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي نتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات  $x_i$ .

- نأخذ أحد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن  $a$  وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابل لأكثر تكرار.

- نجد الانحراف عن الوسط الفرضي من العلاقة  $d_i = x_i - a$

حاصل ضرب كل انحراف في التكرار المقابل له ثم المجموع أي:

- نجد  $\sum_{i=1}^n di(f_i)$

نجد مربع الانحرافات أي:  $d_i^2$

نجد مجموع حاصل ضرب أي:  $\sum_{i=1}^n d_i^2 \cdot f_i$

نجد التباين من العلاقة

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n di f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right)^2$$

نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n di f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right)^2}$$

تكرارات أقل من أو يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري أكثر دقة.  
 (3) إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة المختصرة عن  
 الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات  $x_i$ .
- نجد الوسط الفرضي  $a$  وهو أحد مراكز الفئات.
- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة  $d_i = x_i - a$
- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة ..... (1-27)

$$d'_i = \frac{d_i}{l}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة  $\times$  التكرارات أي

$$\sum_{i=1}^n d'_i f_i$$

- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات

$$\sum d'^2 f_i$$

المختصرة  $\times$  التكرارات أي

$$S_x^2 = l^2 \left[ \frac{\sum_{i=1}^n d'^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n d'_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right)^2 \right]$$

نجد التباين من العلاقة التالية

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$S_x = l \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d'^2 f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n d'_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \right)^2}$$

مثال (1-50) : البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (1-19)

فئات الدرجات	صفر -	-10	-20	-30	-40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (1-19)

المطلوب إيجاد

- (1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.
- (2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول الحل (1-20)

فئات العلامات	التكرار $f_i$	$x_i$	$d_i$	$d_i^2$	$d_i f_i$	$d_i^2 f_i$	$d_i'$	$d_i'^2 f_i$	$d_i'^2$	$d_i' f_i$
صفر -	2	5	-20	400	-400	800	-2	4	4	-4
-10	5	15	-10	100	-100	500	-1	1	5	-5
-20	27	25	-20	400	-800	1800	-2	4	54	-18
-30	47	35	-10	100	-470	4700	1	1	47	47
-40	19	45	20	400	380	7600	2	4	38	76
المجموع	100				760	13600		76		136

جدول (1-20)

- 1- نبدأ بحل المطلوب الاول.
- نحدد الوسط الفرضي وليكن  $a=25$  أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.
- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات  $= 13600$
- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات  $= 760$
- نجد التباين كما يلي

$$S^2 = \frac{13600}{99} - \left( \frac{760}{99} \right)^2$$

$$= 137.37 - 58.9 = 78.47$$

ثم نجد الانحراف المعياري  $S\sqrt{78.47} = 8.86$

(2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.



- نتبع نفس الخطوات السابقة حتى إيجاد الانحرافات  $d_i$ .
- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$$d'_i = \frac{d_i}{l}$$

- نجد مربع الانحرافات المختصرة

$$d'^2_i$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف مختصر في التكرار المقابل له ثم المجموع

$$\sum_{i=1}^n d'_i \cdot f_i = 7 \quad \text{يعني}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب كل مربع انحراف مختصر في التكرار المقابل له

$$\sum_{i=1}^n d'^2_i \cdot f_i = 136 \quad \text{أي}$$

$$S^2 = \left( \frac{136}{99} - \left( \frac{76}{99} \right)^2 \right) 100$$

$$= (1.37 - 0.59)100 = (0.78)100$$

$$= 78$$

- نجد الانحراف المعياري.

$$S = \sqrt{78} = 8.83$$

نلاحظ ان النتيجةين متشابهتين بالقيمة

5-3-1 أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري.

نظرية (1-2): اذا اخضع الانحراف المعياري  $S^2$ ، التباين  $S$  للتحويل الخطي  $f(x)=ax+b$  فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

$$S_y = |a|S_x \quad \dots\dots\dots (1-28)$$

حيث  $S_y$  قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

$$(1-29) \dots\dots\dots$$

$$S^2_y = a^2 \cdot S^2_x$$

حيث  $S^2_y$ : قيمة التباين بعد التأثير

مثال (1-51): إذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات = 4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

$$y = 0.3x + 7$$

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$S_y = |a| \cdot S_x = 0.23(4) + 7 \\ = 1.2 + 7 = 8.2$$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$$S_y^2 = (0.7)^2 \times 16 \\ = 16 \times 0.49 \\ = 7.84$$

1-3-6 العلامة المعيارية وكيفية إيجادها.

تعريف (5-2): إن الدرجة المعيارية لقيمة مشاهدة  $x_i$  لعينة ما هي

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} \quad \dots\dots\dots (1-30)$$

حيث  $Z_i$  هي الدرجة المعيارية للمشاهدة  $x_i$ .

أما إذا كانت المشاهدة مأخوذة من مجتمع فإن الدرجة المعيارية للمشاهدة  $x_i$  يمكن إيجادها من العلاقة.

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma_x}$$

$$\dots\dots\dots (1-31)$$

حيث:  $\mu$  الوسط الحسابي للمجتمع  $\sigma_x$ : الانحراف المعياري للمجتمع.

مثال (1-52): إذا كانت درجة أحمد في امتحان مادة الإحصاء 75 وكان معدل علامات الصف 60 وكان تباين الدرجات 36 أوجد الدرجة المعيارية لدرجة أحمد.

الحل: نجد العلامة المعيارية من العلاقة:

$$Z_{75} = \frac{75 - 60}{\sqrt{36}} = \frac{15}{6} = 2.5$$

أي ان الدرجة المعيارية = 2.5.

مثال (1-53): لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 8، 9، 5، 10 أوجد القيم المعيارية لهذه المشاهدات.

$$\text{الحل: - نجد } \bar{x} = \frac{3+8+9+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$S_x^2 = \frac{(3-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (5-7)^2 + (10-7)^2}{5} \quad \text{نجد}$$

$$= \frac{16+1+4+4+9}{5} = \frac{34}{5}$$

$$Sx = \sqrt{6.8} = 2.61$$

وعليه فإن

$$Z_1 = \frac{3-7}{2.61} = \frac{-4}{2.61} = -1.5$$

$$Z_2 = \frac{8-7}{2.61} = \frac{1}{2.61} = 0.4$$

$$Z_3 = \frac{9-7}{2.61} = \frac{2}{2.61} = 0.8$$

$$Z_4 = \frac{5-7}{2.61} = \frac{-2}{2.61} = -0.8$$

$$Z_5 = \frac{10-7}{2.61} = \frac{3}{2.61} = 1.2$$

ولو اخذنا الدرجة المعيارية الاولى وفسرنا الرقم -1.5 هذا يعني ان قيمة المشاهدة الاولى تنحرف عن وسطها بدرجة ونصف الى اليسار

مثال (1-54): لدينا قيم المشاهدات التالية 2، 6، 12، 16، 9 أوجد الانحراف المعياري والتباين لهذه المشاهدات.

الحل : نجد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

$$\bar{x} = \frac{2+6+12+16+9}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

$$S^2 = \frac{(2-9)^2 + (6-9)^2 + (12-9)^2 + (16-9)^2 + (9-9)^2}{5}$$

$$= \frac{49+9+9+49+0}{5} = \frac{116}{5} = 23.2$$

$$S = \sqrt{23.2} = 4.82$$

هناك طرق أخرى لإيجاد التباين والانحراف المعياري لقيم المشاهدات غير المبوبة على النحو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \dots\dots(1-32)$$

أما الانحراف المعياري فيمكن إيجاده على النحو:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2}$$

مثال (1-55): أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية:

8, 12, 10, 5, 15

الحل: نكون جدول الحل (1-21)

x	x <sup>2</sup>
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (1-21)

$$S^2 = \frac{558}{5} - \left( \frac{50}{5} \right)^2 = 111.6 - 100 = 11.6$$

$$S = \sqrt{11.6} = 3.4$$

مثال (1-56): البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبينة كما في الجدول (1-22)

فئات الأجرة	20-	40-	60-	80-	100-120
عدد العمال	8	50	45	20	15

جدول (1-22)

والمطلوب : إيجاد التباين والانحراف المعياري بطرقه المختلفة

الحل: نكون جدول الحل (1-23)

الفئات	$x_i$	$f_i$	$x_i f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$	$X^2 f_i$	$d_i$	$d_i f_i$	$D^2 f_i$
-20	30	8	240	-44.4	1971.16	1577.33	900	-40	320	12800
-40	50	12	650	-24.4	595.36	7144.32	5200	-20	240	4800
-60	70	45	3150	-4.4	19.36	871.2	4900	0	0	0
-80	90	20	1800	15.6	243.36	4867.2	8100	20	400	8000
-100 120	110	15	1650	35.6	1267.36	1901.04	12100	40	600	24000
		100	4400			4766.4	601200		440	29600

جدول (1-23)

بالاستفادة من الجدول اعلاه فإن

نجد أولاً: الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{7440}{100} = 74.4$$

ثم نجد التباين من العلاقة

$$S^2 = \frac{47664}{100} = 476.64$$

أما الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{476.64} = 21.83$$

طريقة ثانية:

$$S^2 = \frac{601200}{100} - \left( \frac{7440}{100} \right)^2 = 6012 - 5535.36 = 476.64$$

أما الانحراف المعياري يمكن ايجاده على النحو

$$S = \sqrt{476.64} = 21.84$$

### 7-3-1 التباين التجميعي: (Poaled Variance) والانحراف المعياري.

لو أخذنا من مجتمعات عددها  $(n)$  عينات ذوات احجام  $(n_1, n_2, \dots, n_n)$  ومن هذه العينات حسبنا اوساطها الحسابية وتبايناتها  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, S_1^2, S_2^2, \dots, S_n^2)$  فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة هو:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} \quad \dots (1-33)$$

أو

$$\mu = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_n \bar{x}_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} \quad \dots (1-34)$$

$$S_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) S_i^2 + n_i (\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - 1)}$$

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) S_i^2 + n_i (\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - k)}$$

مثال (1-57): إذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (1-24) -

جدول

$1\Pi$	$\Pi$	$1$	
200	300	100	$n$
60	55	65	$\bar{x}$
64	81	49	$\sigma^2$

(1-24)

والمطلوب إيجاد: (1) إيجاد الوسط الحسابي لوسط العينات

(2) الثباين والانحراف المعياري التجميعي.

الحل: بتطبيق العلاقة:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{65 + 100 + 55 \times 300 + 60 \times 200}{100 + 300 + 200}$$

$$\frac{35000}{600} = 58.3$$

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) S_i^2 + n_i (\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - 1)} \\ &= \frac{49(99) + 81(299)9 + 64(199) + 4444.4 + 3333.3 + 6422.2}{600 - 3} \\ &= \frac{56006}{597} = 93.81 \end{aligned}$$

(1-34) .....

عدد درجات الحرية = عدد القيم المستقلة =  $n-1$

### 8-3-1 المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر:

ويستخدم لهذه العملية عدة مقاييس منها:

#### 1 - مقاييس التشتت النسبي:

وهو موضوع يعالج مسألة المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر، فعند دراسة توزيعين أو أكثر فإننا نواجه مشاكل منها:

1- الاختلاف في وحدات القياس.

2- الاختلاف في المتوسطات.

ولهذا عرف مقياس التشتت النسبي ، بأنه :

مقياس التشتت النسبي = مقياس التشتت المطلق  
مقياس المتوسط

ومن هذه المقاييس

#### 1- نصف المدى الربيعي

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

ويؤنم هذا المقياس الوسيط  $\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$  لمقياس متوسط.

وعليه فإن : مقياس التشتت النسبي = مقياس التشتت المطلق  
مقياس المتوسط

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_3 + Q_1)} \\ &= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \end{aligned}$$

وإذا أخذ شكل النسبة المئوية فإنه يعرف بمعامل الاختلاف:-

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \times 100\%$$

#### 2- استخدام الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي:

ويؤنمه الوسط الحسابي لمقياس متوسط.

وعليه :



مقياس التشتت النسبي  $\frac{S}{\bar{x}}$  ..... (1-37)

وإذا أخذ شكل النسبة المئوية فإنه يعرف بمعامل الاختلاف

معامل الاختلاف  $= \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$  ..... (1-38)

### 1-3-9 أهمية تطبيق معامل الاختلاف:

الاختلاف نفي لمفهوم التجانس، ويوظف هذا المفهوم للدلالة على النوعية والجودة، وخاصة ضبط النوعية ومراقبة الجودة.

مثال (1-58) إذا كان لدينا البيانات في جدول (1-25) عن سلعتين فايهما أجود؟

البيان	السلعة I	السلعة II
وزن الوحدة	60 غم	60 غم
سعر الوحدة	340	340
n	50	50
x	52	48
S	8	7
معامل الاختلاف	$\frac{8}{52} \times 100\% = 15.385\%$	$\frac{7}{48} \times 100\% = 14.583\%$

جدول (1-25)

فمن الجدول يتبين ان السلعة II أجود من السلعة I . لأن معامل اختلافها أقل معامل اختلاف السلعة الأولى.

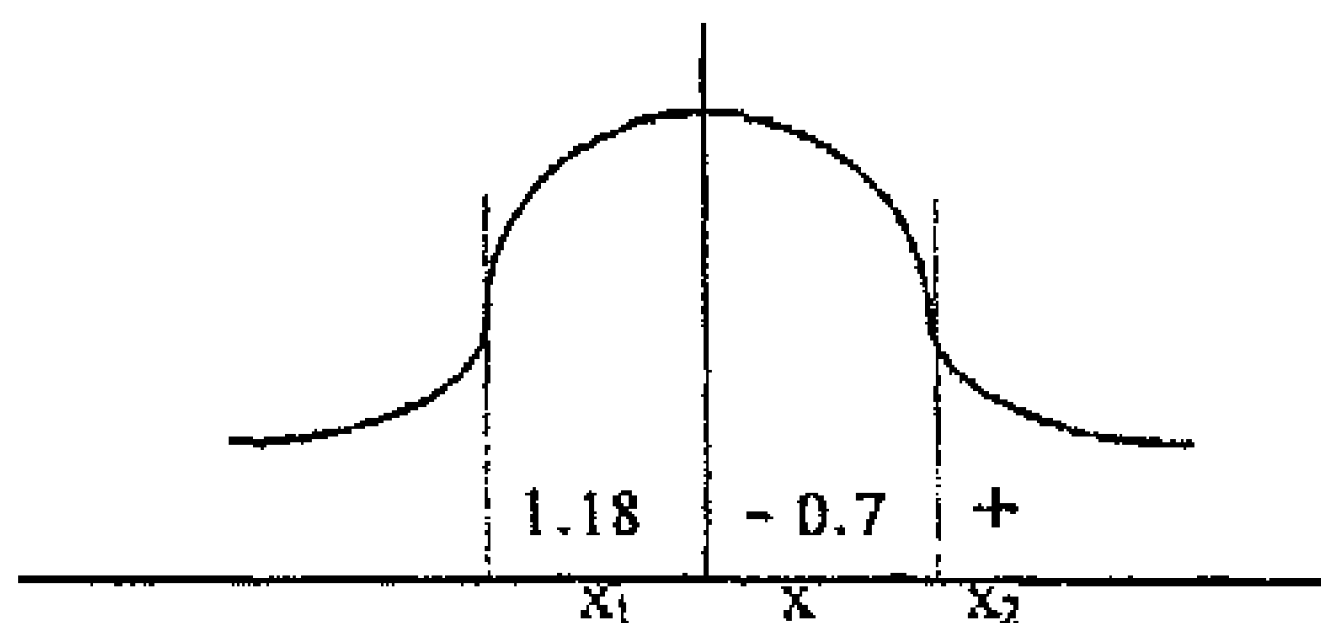
\* ملاحظة : كلما قل معامل الاختلاف زادت جودة السلعة.

### 1-3-10 التعبير: (Standardization)

هو وضع القيم ضمن معيار موحد، وإحصائياً هو عبارة عن التعبير عن قيم المتغير (x) الذي له التوزيع التكراري (x) والمتوسط  $\bar{x}$  والانحراف المعياري S، بعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها تلك القيم عن وسطها الحسابي.

فألي قيمة مثل  $x_i$  فإن:

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{S} \quad \dots\dots (1-39)$$



شكل (1-1)

ففي الشكل: (1-1)

- القيمة  $(0.7+)$  تعني أن القيمة  $x_2$  تتحرف  $(0.7)$  انحرافاً معيارياً عن  $x$  من الجهة اليمنى .

- القيمة  $(1.18-)$  تعني أن القيمة  $x_1$  تتحرف  $(1.18)$  انحرافاً معيارياً عن  $\bar{x}$  من الجهة اليسرى.

مثال (1-59): ضمن المعطيات في جدول (1-26) أيهما مستواه أعلى تحصيلياً

البيان	أحمد	محمود
$x_i$	72	82
$\bar{x}$	60	80
$S$	80	10
$Z_x$	1.5	0.2

جدول (1-26)

أحمد مستواه أعلى لأن القيمة المعيارية له أكبر.

\* ملحوظة: كلما زادت القيمة المعيارية زاد المستوى، ومنه فإن المستوى يتناسب تناسباً طردياً مع القيمة المعيارية.

مميزات القيمة المعيارية:

1) للمتغير  $(x)$  الذي له التوزيع التكراري  $d(x_i)$ ، فإن القيمة المعيارية  $(Z_x)$  لها توزيع تكراري كمتوسط حسابي  $= 0$ ، وتباين  $= 1$

$$\bar{Z} = 0, \sigma_z^2 = 1$$

مثال (2-16): جد  $(S_z^2)$  و  $(\bar{z})$  للبيانات التالية المبينة بالجدول (1-27)

$Z^2$	$Z$	$(x_i - \bar{x})^2$	$x_i$
2	1.14-	16	2
0.5	1.41-	4	4
0	0	0	6
0.5	0.7+	4	8
2	1.14+	16	10
5	صفر	40	30

جدول (1-27)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{n} = 0$$

$$S_{Z^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{n} = \frac{5}{5} = 1$$

مثال (2-17): إذا كان الوسط الحسابي لقيم مشاهدات 50 وانحرافها المعياري 4 وكانت مجموعة أخرى من قيم مشاهدات مبوبة كما في الجدول (1-28) فيما يلي بيان بعدد ساعات الاستعداد الأسبوعي المبوبة حسب مشاهدات العينة العشوائية الحجم 50 من الطلبة.

التكرار	فئات أقل من	$x_i f_i$	$x_i$	عدد الطلبة	فئات الاستعداد
8	2 >	8	1	8	-0
20	4 >	36	3	12	-2
35	6 >	75	5	15	-4
45	8 >	70	7	10	-6
50	10 >	45	8	5	10-8
		234		50	

جدول (1-28)

المطلوب : ايجاد

- (1) ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.
- (2) ايجاد الانحراف المتوسط.
- (3) ايجاد الانحراف المعياري.
- (4) ايجاد معامل الاختلاف.
- (5) ايجاد معامل الالتواء بطريقة بيرسون.
- (6) ايجاد معامل الالتواء بناء على مقارنة المساحة بين الربيعان.

الحل: (1) نجد السط الحسابي من العلاقة التالية  
الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{234}{50} = 4.68$$

(2) نجد الانحراف المتوسط من العلاقة التالية:

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^n f_i} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$= \frac{8|1-5| + 12|3-5| + 15|5-5| + 10|7-5| + 5|9-5|}{50} = \frac{32 + 25 + 0 + 20 + 20}{50}$$

$$= \frac{96}{50} = 1.92$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} \quad (3) \text{ الانحراف المعياري} =$$

$$= \sqrt{\frac{8(1-5)^2 + 12(3-5)^2 + 15(5-5)^2 + 10(7-5)^2 + 5(9-5)^2}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{128 + 48 + 0 + 40 + 80}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{296}{50}} = \sqrt{5.92} = 2.433$$

4) نجد معامل الاختلاف Variation coefficient من العلاقة التالية

$$V.C = \frac{S_x}{\bar{x}} \times 100\% = \frac{2.433}{4.68} \times 100\% = 52\%$$

5) نجد معامل الالتواء بطريقة بيرسون من العلاقة التالية

$$\alpha_1 = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x} = \frac{5 - 4.75}{2.433} = 0.102$$



**الفصل الثاني**  
**التباديل والتوافيق ونظرية ذات**  
**الحدين**





## الفصل الثاني

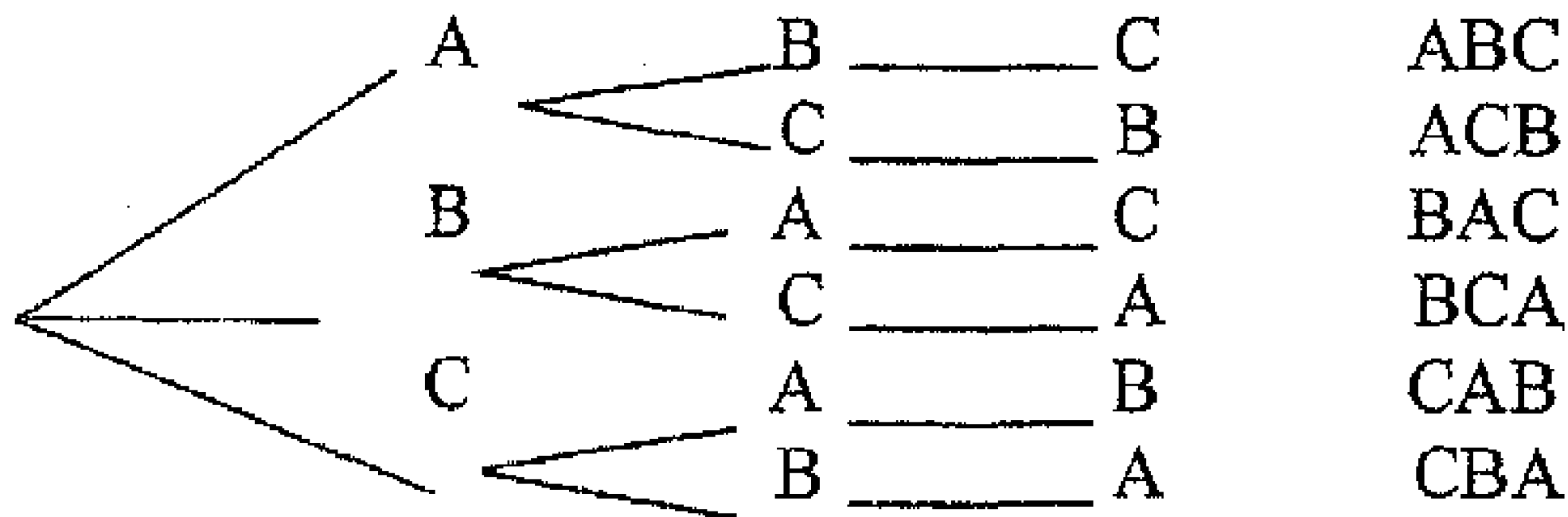
### التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

#### 2-1 التباديل : Permutation

إن الإنسان على مر العصور وهو يبحث عن عدد الطرق التي يمكن أن يرتب بها مجموعة من الأشياء . كما هو الحال في كيفية جلوس خمسة عشر شخصا على مقعد معين أو وضع عشرين كرة مرقمة في عشرين مكان معين ، أو إذا أراد شخصا السفر من مدينة إلى أخرى عبر مدينة ثالثة وكان بين كل مدينة وأخرى طرق مختلفة أراد أن يسافر بأحد هذه الطرق وإلى آخره من مثل هذه الضواهر وبشكل عام إذا أردنا ترتيب  $n$  من الأشياء في صف فيكم طريقة يمكن عمل ذلك وهذا هوة ما نبحث ونريد إيجاد علاقة عامة لمثل هذه الأسئلة وما شابهها ، وسوف نستعين بمخطط الشجرة للوصول إلى مثل هذه الإجابات وسنتناول المثال التالي

مثال (2-1) : إذا رمزنا لثلاثة كتب بالأحرف  $A, B, C$  وأردنا ترتيب هذه الكتب على رف معين فيكم طريقة يمكن عمل ذلك

الحل : في هذا الحل نستعين بالتمثيل شكل (2-1) على النحو التالي



شكل (2-1) التمثيل بالشجرة

نلاحظ إن عدد الطرق التي من خلالها يمكن ترتيب ثلاثة كتب على الرف هي ستة طرق وهناك طريقة أخرى لذلك .

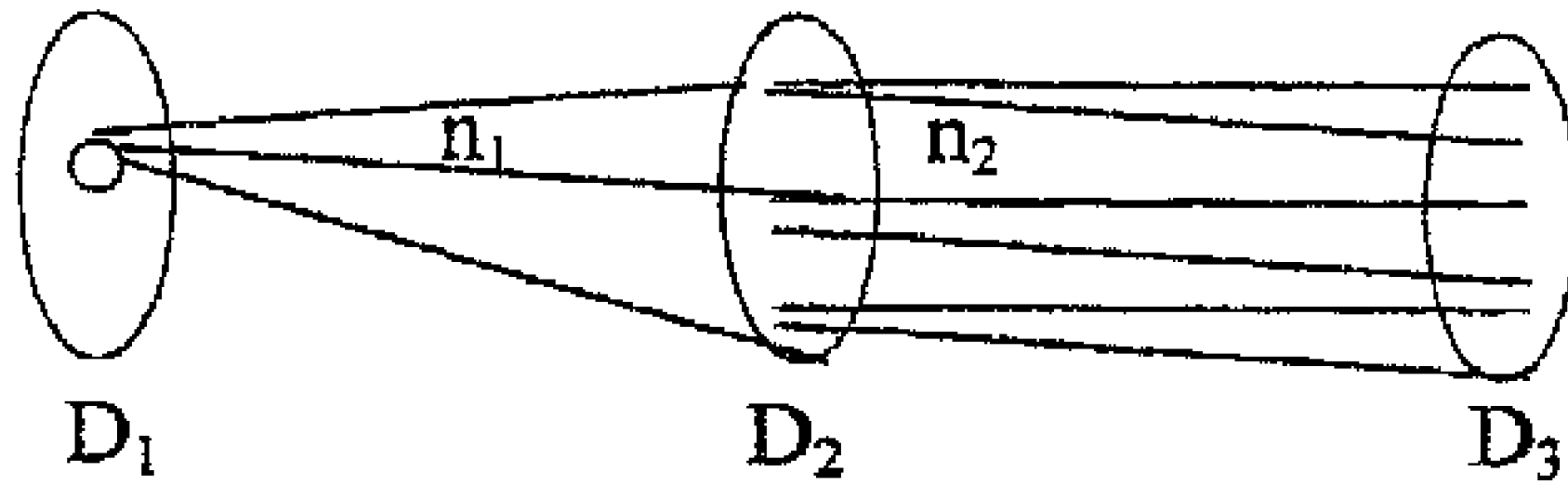
حل آخر : أمامنا ثلاثة عيون وهي التي تمثل مواقع الكتب ونريد ملئها بالكتاب الأول يمكن وضعه بثلاثة طرق ، الكتاب الثاني يمكن ترتيبه بطريقتين الكتاب الثالث يكون أمامه طريقة واحدة

3		
---	--	--

3	2	
---	---	--

3	2	1
---	---	---

2-2: مبدأ الضرب (قاعدة الضرب): ليكن لدينا ثلاثة مواقع كما هو موضح في شكل (2-2)



شكل (2-2)

فأذ فكرنا انه يمكننا ترتيب ظاهرة معينة ب  $n_1$  طريقة وكان عدد طرق ترتيب ظاهرة آخر هو  $n_2$  طريقة فان عدد طرق الترتيب الناتجة  $n_1 \cdot n_2$  وإذا كان لدينا  $k$  ظاهرة فان عدد الترتيب تصبح عدد الترتيب.

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

مثال (2-2): كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام 1,2,3,4,5 بحيث لا يتكرر ظهور الرقم في أي من هذه الأعداد

الحل: بما أن العدد مكون من ثلاثة أرقام فان الأماكن التي يراد ملئها هي ثلاثة أماكن . المكان الأول يمكن ملؤه بخمسة طرق والمكان الثاني بأربعة طرق بينما المكان الثالث يمكن ملؤه بثلاثة طرق ليصبح عدد الأعداد التي يمكن تكوينها  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

### 3-2 قاعدة الجمع:

إذا كان لدينا عمليات أحدهما تتم بـ  $n_1$  طريقة والعمليات الأخرى تتم بـ  $n_2$  طريقة أردنا إنجاز إحدى العمليتين فبكم طريقة يمكن أن يتم الإنجاز. هذا ما نريد الإجابة عليه فحسب قاعدة الجمع فإن عدد الطرق هو  $n_1 + n_2$  وبشكل عام فإن عدد الطرق =

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

مثال (3-2): يريد عشرة أشخاص تنظيم رحلة سياحية إما من خلال قطار أو من خلال الباصات فإذا كان لدينا ثلاث قطارات وباصين فبكم طريقة يمكن تنظيم هذه الرحلة بحيث أن يستعملوا القطار أو الباص

الحل: حسب قاعدة الجمع فإن عدد الطرق  $3+2=5$

### 4-2 مضروب $n$

تعريف (1-2): يقال لحاصل ضرب الأعداد من  $1$  إلى  $n$  بمضروب العدد ويرمز له بالرمز  $n!$  وحسب هذا التعريف فإن

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 2.1$$

وبصورة أخرى

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$$

وبشكل خاص فإن  $1! = 1, 0! = 1$  وكلما زاد قيمة  $n$  فإن إيجاد مضروب العدد  $n$  يصبح عبثا كبيرا وإذا نستعين بجداول اللوغاريتمات وكذلك أيضا يمكن الاستعانة بصيغة ستيرلنغ وهي

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

وهذه قيمة تقريبية.

نظرية (2-2): أن عدد الترتيب لـ  $n$  من الأشياء المنفصلة عن بعضها البعض هو  $n!$ .

الإثبات: يوجد لدينا  $n$  مكان نريد ملؤها جميعا فأول مكان يمكن ملأه بـ  $n$  طريقة والمكان الثاني بـ  $n-1$  المتبقية وكذلك المكان الثالث وهكذا وإذا استمرت العملية بهذا المنوال وباستخدام قاعدة الضرب فإن عدد الترتيب يصبح

$$n! = n(n-1)(n-2).....2.1$$

ويتم المطلوب

سوف نرمز إلى ترتيب  $n$  من الأشياء غير المرتبطة مع بعضها البعض بالرمز  $nPn$  ويمكن حسابه من العلاقة  $nPn = n!$

مثال (2-4): بكم طريقة يمكن لسبعة اشخاص أن يقفوا في صف واحد أمام مدخل دائرة حكومية ؟  
الحل: عدد الترتيب =

$$7P7 = 7! = 5040$$

نظرية (2-2) : أن ترتيب  $n$  من الأشياء غير المرتبطة مع بعضها البعض مأخوذ  $k$  مرة فإن عدد الترتيب الناتجة :

$$nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

الإثبات: أن عدد الأماكن المراد ملئها هو  $k$  مكان فالمكان الأول يمكن ملئه بأحد  $n$  من الأشياء والمكان الثاني بأحد الأشياء المتبقية وهي  $n-1$  وبطريقة مماثلة فإن المكان  $k$  يمكن ملئه بأحد الأشياء المتبقية وهي  $[n-(k-1)]$  وباستخدام قاعدة للضرب فأنه يمكن كتابة

$$nP_k = n(n-1).....[n-(k-1)]$$

والعلاقة أعلاه إذا ضربت بمقدار

$$\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

فإن العلاقة تصبح على النحو

$$nP_k = \frac{n(n-1).....[n-(k-1)](n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال (2-5): كم كلمة من حرفين يمكن تكوينها من أحرف الكلمة اشترى

الحل : أن كلمة اشترى مكونة من خمسة حروف وعلية فان عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الكلمة ذات الخمسة حروف  $5P2=$

نظرية (2-3): إذا كان لدينا  $n_1$  من الأشياء من النوع الأول ، و  $n_2$  من الأشياء من النوع الثاني ،  
 $n_k$ ..... من الأشياء من النوع  $k$  وكان

$$n = n_1 + n_2 + ..... + n_k$$

وإذا أردنا ترتيب  $n$  من الأشياء فان عدد الترتيب الناتجة هي

$$\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_k!}$$

مثال (2-6): كم كلمة يمكن تكوينها من كلمة ( السلاسل )

الحل : أن كلمة السلاسل مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة هي أ، س، ل حيث  
 : فان عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها هي  $n_1=2, n_2=2, n_3=3$

$$\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{2.2.3!} = 210$$

2-5: الترتيب الدائري:

إن عدد الترتيب الناتجة من ترتيب  $n$  من الأشياء حول دائرة هو

$$n!Pn = (n - 1)!$$

مثال (2-7): بكم طريقة يمكن جلوس سبعة أشخاص حول طاولة

الحل: إن عدد طرق جلوس سبعة أشخاص حول طاولة معينة يمكن إيجاده من العلاقة أعلاه

$$7P7 = (7 - 1)! = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

## 2-6 التوافيق Combination

تعريف: التوافيق هو اختيار عشوائي لـ  $k$  من الأشياء من بين  $n$  من الأشياء المعتاد وبحيث أن  $k \leq n$  مع ملاحظة أن الترتيب مهم في التباديل بينما الترتيب ليس له أهمية في التوافيق وإذا أردنا توضيح هذا المفهوم فيمكن الاستفادة من الجدول (2-1) الذي يوضح طرق الترتيب وطرق الاختيار من ثلاثة حروف  $A, B, C$  مأخوذة اثني

التوافيق	التباديل
AB	AB, BA
AC	AC, CA
BC	BC, CB

### جدول (2-1)

وقبل الدخول في نظريات التوافيق نعرف أولاً مفهوم

$$\binom{n}{k} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots[n-(k-1)]}{1.2\dots\dots k} \dots\dots (1-1)$$

وبشكل خاص فإن

$$\binom{n}{n} = 1, \binom{0}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{0} = 1$$

خواص

$$\binom{n}{k}$$

(a) إذا كان  $n$  عدد صحيح غير سالب وكان  $k$  أكبر من  $n$  فإن

$$\binom{n}{k} = 0$$

الإثبات: لأن  $1 < n < k$  فمن تعريف

$$\binom{n}{k}$$

فان البسط للكسر سيكون صفرا وبالتالي فالكسر يصبح صفرا ايضا  
(b) اذا كان  $n$  عددا صحيحا ليس سالبا وكان  $n > k$  فان

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

الإثبات : نضرب البسط والمقام للعلاقة (2-1) في  $(n-k)!$  لتصبح العلاقة

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)](n-k)!}{1.2\dots k.(n-k)!} \dots (2-1)$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \dots (2-3) \dots (c)$$

الإثبات : نكتب مفكوك الطرف الأيسر حسب العلاقة (2-1)

الطرف الأيسر

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]}$$

نأخذ العامل المشترك

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[ 1 + \frac{n-k}{k+1} \right]$$

ثم بتوحيد المقامات

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left( \frac{k+1+n-k}{k+1} \right)$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![n-k+1-1]} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]}$$

$$= \binom{n+1}{k+1}$$

وهذا هو الطرف الأيمن ويتم المطلوب.

(d)

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

الإثبات: نثبت صحة العلاقة باستخدام الاستقراء الرياضي وذلك بأخذ  $k=0$  نجد أن

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n+1}{0} = 1 \Rightarrow \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

وعليه فإن العبارة صحيحة عندما  $k=0$

وعندما  $k=1$  فإن

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} &= 1 + \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n! + (n+1)!}{n!} \\ &= \frac{n![1 + (n+1)]}{n!} = \frac{n!(n+1)(n+2)}{n!(n+1)} = \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \end{aligned}$$

وذلك بضرب البسط والمقام في  $n+1$

ثم نفرض أن العبارة الصحيحة عندما  $k=t-1$  ونريد إثبات أن العبارة الصحيحة عندما  $k=t$  أي أن

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \dots + \binom{n+t-1}{t-1} + \binom{n+t}{t} = \binom{n+t}{t-1} + \binom{n+t}{t}$$

وبالعودة للخاصية © فإن

$$\binom{n+t}{t-1} + \binom{n+t}{t} = \binom{n+t+1}{t}$$

وعليه فإن العلاقة صحيحة عندما  $k=t$

(e) العلاقة التالية تعتبر من الخصائص الهامة في التوافيق

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

الإثبات : نأخذ الطرف الأيمن ونكتب مفكوكه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$



نأخذ الطرف الأيسر ونكتب مفكوكه

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

من (1)، (2) نلاحظ انهما متساويتان وهو المطلوب .

**نظرية (2-4) :** إذا كان لدينا  $n$  من الأشياء غير مرتبطة مع بعضها البعض فإن توافق  $k$  من الأشياء مأخوذة معا سوف نرمز لها بالرمز  $nC_k$  أو  $C$  أو  $C(n,k)$

$$nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ويقسمة كلا الطرفين على  $k!$  ينتج أن

$$nC_k = \frac{nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

**مثال (2-8) :** بكم طريقة يمكن اختيار أربعة كتب من بين ثمانية كتب .

**الحل :** عدد طرق الاختيار

$$8C_4 = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 70$$

**مثال (2-8) :** يراد اختيار لجنة مكونة من خمسة أشخاص من بين سبعة طلاب ذكور وخمسة بنات وبحيث أن تكون اللجنة المختارة منها ثلاثة ذكور وبناتان.

**الحل :** عدد طرق اختيار اللجنة هو

$$\binom{4}{2} \binom{7}{3} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 35 = 210$$

**نظرية (2-5) :** إن توافق  $(n-k)$  من بين  $n$  أشياء ونعني به عدد الطرق هو مساويا لعدد طرق  $n$  مأخوذة منه  $k$  شيء أي

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

**الإثبات :** إن عدد التوافق هو

$$\binom{n}{n-k}, \binom{n}{k}$$

وقد أثبتنا أن

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

من خاصية سابقة وهو المطلوب

**تعريف (2-2):** إذا كان

$$n_1, n_2, \dots, n_r$$

أعدادا صحيحة غير سالبة وكان

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r \Rightarrow \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

**مثال (2-9):** أوجد قيمة

$$\binom{7}{2,3,2}$$

**الحل:** من تعريف (1-2) فإن

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!3!2!} = 210$$

**نظرية (2-6):** لتكن المجموعة A محتوية على n من العناصر وليكن

$$n_1, n_2, \dots, n_r$$

أعدادا صحيحة موجبة وبحيث أن

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$$

فإذا كانت

$$A_i, i = n_1, n_2, \dots, n_r$$

حيث  $A_i$  تمثل المجموعات الجزئية للمجموعة  $A$  فإن عدد الطرق التي يمكن أن تجزأ إليها هذه المجموعات هي

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

الإثبات : إن عدد عناصر المجموعة الجزئية  $A_{n_1}$  هو  $n_1$  وبالتالي فإن عدد طرق اختيار عناصرها  $\binom{n}{n_1}$  وان عدد عناصر المجموعة الجزئية  $A_{n_2}$  هو  $n_2$  وعدد

اختيار عناصرها من عدد العناصر المتبقية وهي  $n - n_1$  هو بنفس الطريقة نستمر إلى أن يكون عدد طرق اختيار عناصر المجموعة الجزئية  $A_{n_r}$  هو

$$\binom{n - n_1 - n_2, \dots, n_{r-1}}{n_r}$$

وعليه فإن عدد اختيار عناصر المجموعة  $A$  يصبح

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{r-1}}{n_r}$$

$$= \frac{n!}{n! (n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2! (n - n_1 - n_2)!} \dots \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{r-1})!}{n_r! (n - n_1 - \dots - n_{r-1} - n_r)!}$$

وبعد عمليات الاختصار يبقى

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

وهو المطلوب مع ملاحظة أن

$$(n - n_1 - n_2 - \dots - n_r)! = 0! = 1$$

مثال (10-2) : يراد توزيع ثمانية كتب مختلفة بين ثلاثة أولاد بحيث يراد إعطاء الولد الأول كتابين وللولد الثاني ثلاثة كتب وللولد الثالث ثلاثة كتب أيضا بكم طريقة يمكن توزيع الثمانية كتب بين الثلاثة أولاد .

الحل : أن عدد طرق التوزيع هو

$$\frac{8!}{2!3!3!} = 560$$

## 2-7 نظرية ذات الحدين.

أن المقدار  $(a+b)$  عبارة عن ذي حدين حيث  $a$  تمثل الحد الأول ،  $b$  تمثل الحد الثاني وبفك ذي الحدين حسب الأسس الصحيحة الموجبة وعلى سبيل المثال فإن مفكوك كل من المقادير التالية على النحو

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ونلاحظ أن عدد حدود المفكوك = الأس + 1 ومثال ذلك إن عدد حدود مفكوك المقدار  $(a+b)^4$  هو  $5 = 1 + 4$  وكلما زاد الأس فإن أخذ المفكوك يزداد صعوبة لذا أصبح من الضروري البحث عن صيغة لإيجاد المفكوك يسهل عملية أخذ المفكوك.

نظرية (2-7): على اعتبار أن  $n$  عدد صحيح موجب ولكل قيم  $a, b$  فإن

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

أو بصيغة المجموع

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \dots \dots \dots (2-4)$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

لذلك ففي المساواة الأولى فإن معامل  $a^n, b^n = 1$

الإثبات : سوف نثبت هذه النظرية باستخدام الاستقراء الرياضي

أولاً: العلاقة (2-4) صحيحة عندما  $n=1$  حيث أن

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1$$

$$= 1.a + 1.b = a + b$$

$$a+b = a+b$$

إذا أي أن العبارة متحققة عندما  $n=1$

ثانياً : نفرض صحة العبارة عندما  $n=k$  أي

$$(a+b)^k = a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k$$

ثالثاً : نثبت صحة العبارة عندما  $n=k+1$  لذا نضرب طرفي المعادلة أعلاه

في  $(a+b)$  لتصبح العلاقة كما يلي

$$(a+b)^k (a+b) = (a+b) \left( a^k + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \dots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^k \right)$$

$$\Rightarrow (a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k}{1} a^k b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k} a^1 b^k$$

$$+ \binom{k}{0} a^k b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k}{k-2} a^2 b^{k-1} + \binom{k}{k-1} a^1 b^k + b^{k+1}$$

والعلاقة أعلاه نستخدمها في العلاقة (2-3) ونعيد ترتيبها لنحصل على

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \dots + \binom{k+1}{k} a b^k + b^{k+1}$$

وبهذا فان النظرية تكون قد أثبتت

ملاحظة : نسمي

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

عوامل ذات الحدين

مثال (2-11) : أوجد مفكوك المقدار  $(3+2x)^5$

الحل : حسب العلاقة (2-4) فان المفكوك يصبح كالتالي هنا

$a=3$  ,  $b=2x$  وعلية

$$\begin{aligned} (3+2x)^5 &= 3^5 + \binom{5}{1}3^4(2x) + \binom{5}{2}3^3(2x)^2 + \binom{5}{3}3^2(2x)^3 + \binom{5}{4}3(2x)^4 + \binom{5}{5}(2x)^5 \\ &= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243 \end{aligned}$$

ولإيجاد معاملات ذات الحدين يمكن استعمال مثلث باسكال على النحو التالي

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \dots\dots\dots 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 1 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots 1 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots 3 \dots\dots\dots 1 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \dots\dots\dots 1 \dots\dots\dots 4 \dots\dots\dots 6 \dots\dots\dots 4 \dots\dots\dots 1 \end{aligned}$$

نلاحظ أن في مثل مثلث باسكال بداية الصف وبنيهايته العدد واحد 1

وباقى عناصر الصف يكون مجموع العددين العلويين وهكذا  
تعميم نظرية ذات الحدين نعني بذلك إذا كان هناك أكثر من حدين ونريد إيجاد  
المفكوك لها وعلية فإن التعميم يصبح كالتالي

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k},$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

مثال (2-12): أوجد مفكوك  $(a+b+c)^3$

الحل: في مثالنا أن  $k=3, n=3$  وحسب التعميم أعلاه

وبعد الاختصار والعمليات الحسابية نجد أن

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 6abc$$

## تمارين على الوحدة الثانية

(1) من أحرف كلمة الذهاب وبشرط أن يستعمل الحرف مرة واحدة كم كلمة يمكن  
تكوينها .

(a) إذا أخذت الأحرف جميعها مرة واحدة .

(b) إذا أخذت ثلاثة أحرف .

مع عدم أخذ المعنى بعين الاعتبار.

(2) من أحرف كلمة الجلوس وبشرط استعمال الحرف مرة واحدة كم كلمة يراد  
تكوينها

(A) إذا استعملت الست حروف معاً .

(B) كلمة تبدأ بالحرف أ ومكونة من أربعة حروف

(C) كلمة مكونة من خمسة أحرف اثنان منهم أحرف علة وثلاثة ليست أحرف علة.

(D) كلمة مكونة من أربعة حروف داخلها الحرف و.

(3) بكم طريقة يمكن لخمس أشخاص الجلوس بحيث اثنان معينان لا يجلسا بجانب بعضهما البعض.

(4) كيس به ست كرات مرقمة من 1 إلى 6

(A) بكم طريقة يمكن سحب ست كرات إذا كان السحب دون إرجاع

(B) بكم طريقة يمكن سحب أربعة كرات من الكيس إذا كان السحب دون إرجاع

(5) شخص لديه ست أزواج من الأحذية المختلفة بكم طريقة يمكن أن يختار هذا الشخص زوج من الأحذية بحيث لا يكون الزوج متطابق مع بعضه البعض (واحدة يسرى والأخرى يمتي)

(6) بكم طريقة يمكن جلوس خمس بنات وولدان في صف بحيث لا يجلس طالبان جنباً إلى جنب

(7) بكم طريقة يمكن جلوس 11 شخص حول طاولة مستديرة بحيث أن ثلاثة أشخاص معينين جنباً إلى جنب .

(8) إذا كان  $n > 0$  و  $r \geq 1$  ،  $r < n$  ، فاثبت أن

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

(9) لدينا 12 شخص 7 منهم يريدون الجلوس في الغرفة A، و 5 في الغرفة B فإذا كان ثلاثة من الاثني عشر شخصاً لا يريدون الجلوس في الغرفة A واثنان منهم لا يريدون الجلوس في الغرفة B بكم طريقة يمكنهم الجلوس في الغرفة A, B .

(10) أمام الطالب خمس كتب رياضيات مختلفة وسبعة كتب فيزياء مختلفة فإذا



أراد هذا الطالب أن يختار اثنان رياضيات ، أربعة فيزياء فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك.

(11) إذا كان لدى طالب عشرين طابع للأردن ، وخمسة عشر سوريا ، وعشرة مصر أراد أن يختار ثلاث طوابع للأردن ، اثنان طابعان سوريا طابعان مصر فبكم طريقة مختلفة يمكن عمل ذلك.

(12) يراد ترتيب 15 كتاب على 4 رفوف بحيث يكون 4 كتب على الرف الأول ، 6 كتب على الرف الثاني و 3 كتب على الرف الثالث وكتابين على الرف الرابع بكم طريقة يمكن عمل هذا الترتيب.

(13) عمارة بها 5 مصاعد وكل مصعد يستطيع حمل شخص 1 أراد ثلاثة أشخاص أن يستعملوا هذه المصاعد فبكم طريقة يمكنهم الصعود بها ؟

(14) إذا كان  $n > 0$  فاثبت ان

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 1$$

(15) لدى طالب 12 كتاب بكم طريقة يمكنه اختيار كتابين فاكتر من بين هذه الكتب.

(16) برهن ان

$$1) \sum_{r=0}^m \binom{n}{r} \binom{n}{m-r} = \binom{mn}{m}$$

$$2) \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

(17) في مفكوك  $(4x^3+7y^2)^5$  عرف الحد الذي يحتوي على  $y^8$  .

(18) أوجد معامل الحد  $y^{12}$  في مفكوك  $(2x-3y^3)^8$

(19) برهن أن

$$P(10,4) + P(10,3) = 64P(10,2)$$

(20) جد قيمة  $n$  إذا كان

$$P(n+1,3) = 2P(n,3)$$

(21) جد قيمة  $n$  إذا كان

$$p(n,5) = 90p(n-2,3)$$

## الفصل الثالث الارتباط والانحدار



## الفصل الثالث

### الارتباط والانحدار

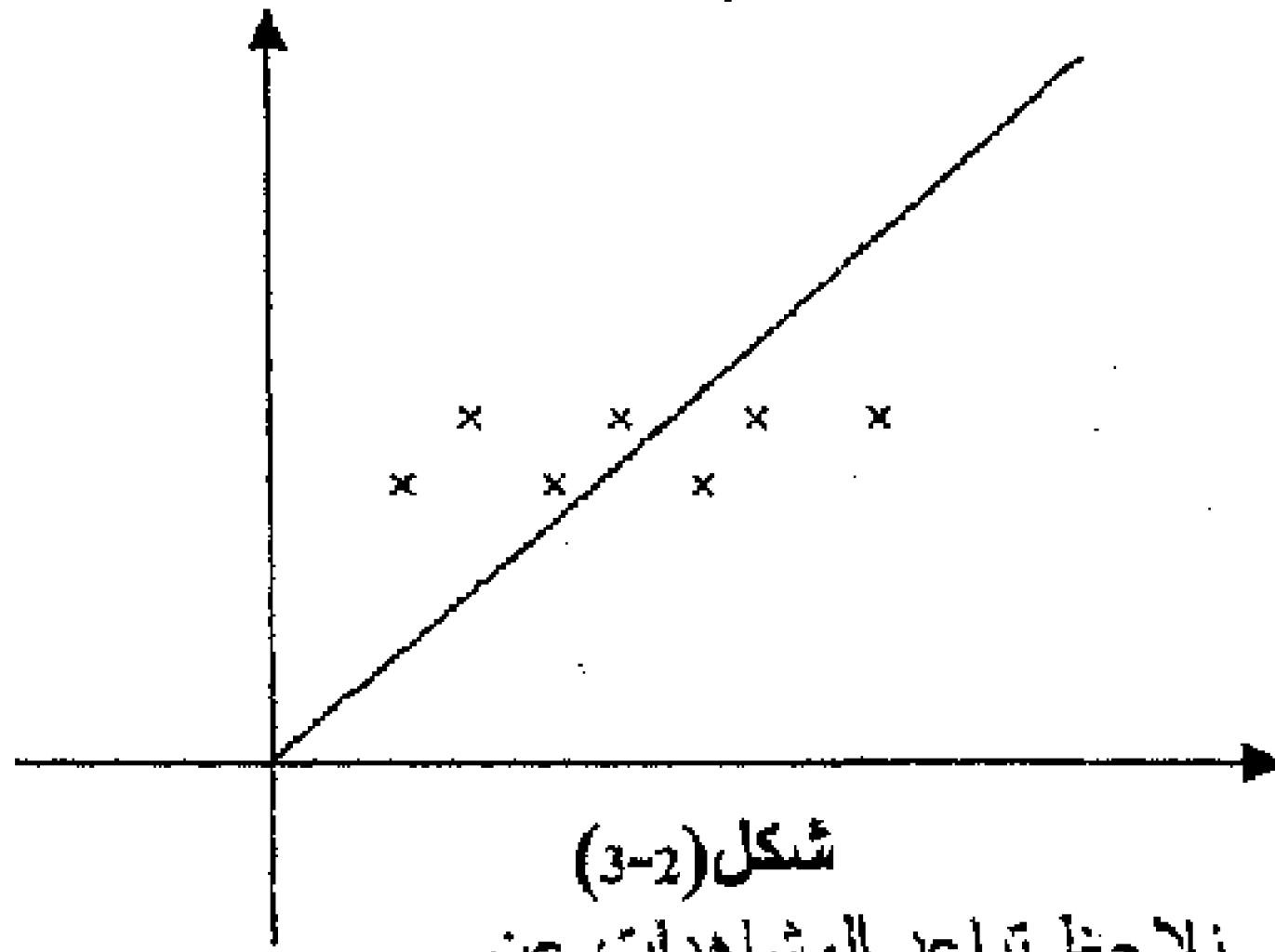
#### (3-1) طريقة جداول الانتشار

حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لا بد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

- نرسم احدائين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة  $x$  وعلى المحور الرأسي الظاهرة  $y$ .

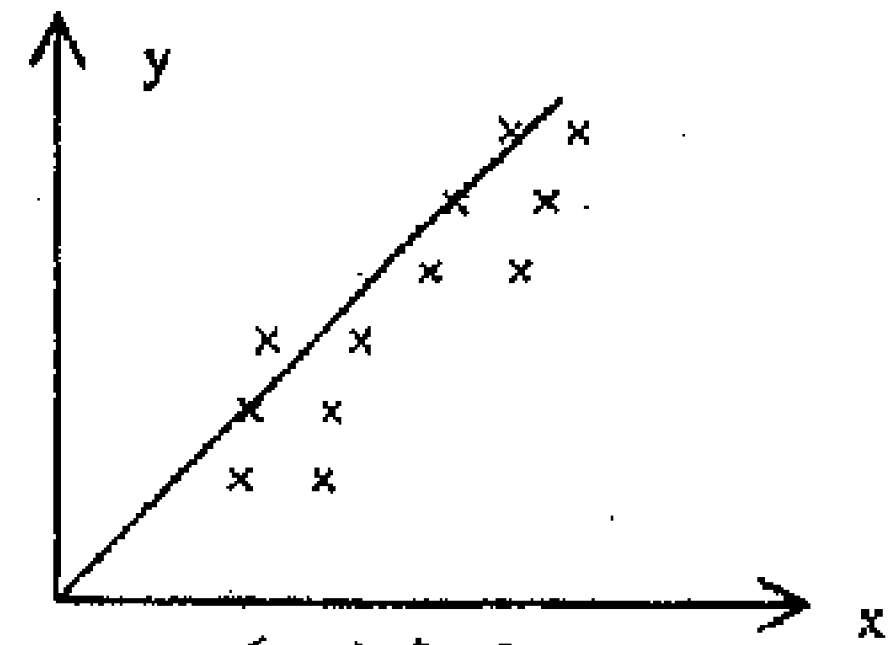
- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير  $x$  والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير  $y$ .

- نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



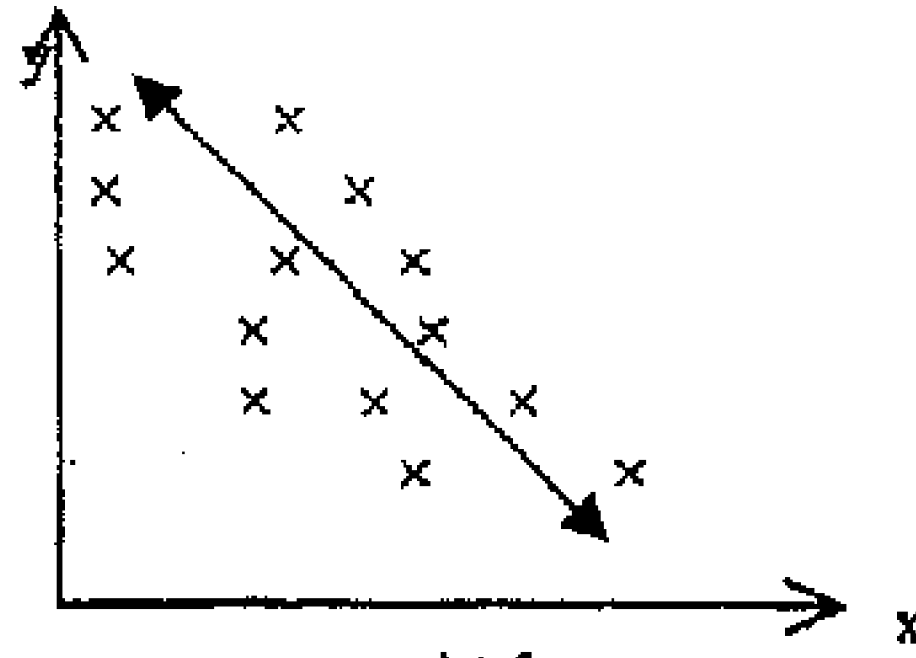
شكل (3-2)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة طردية (موجبة) لكنها ضعيفة.



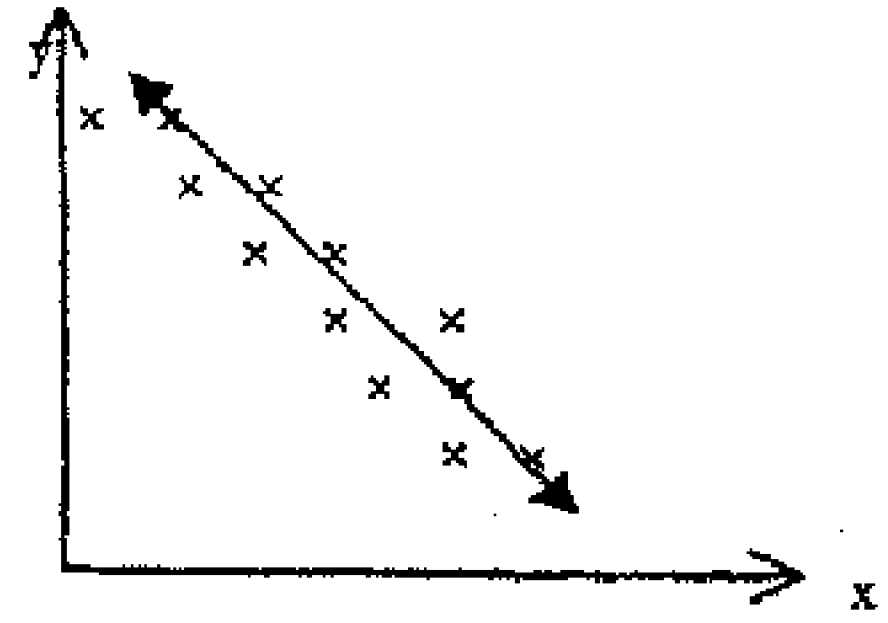
شكل (3-1)

نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي طردي (قوي)



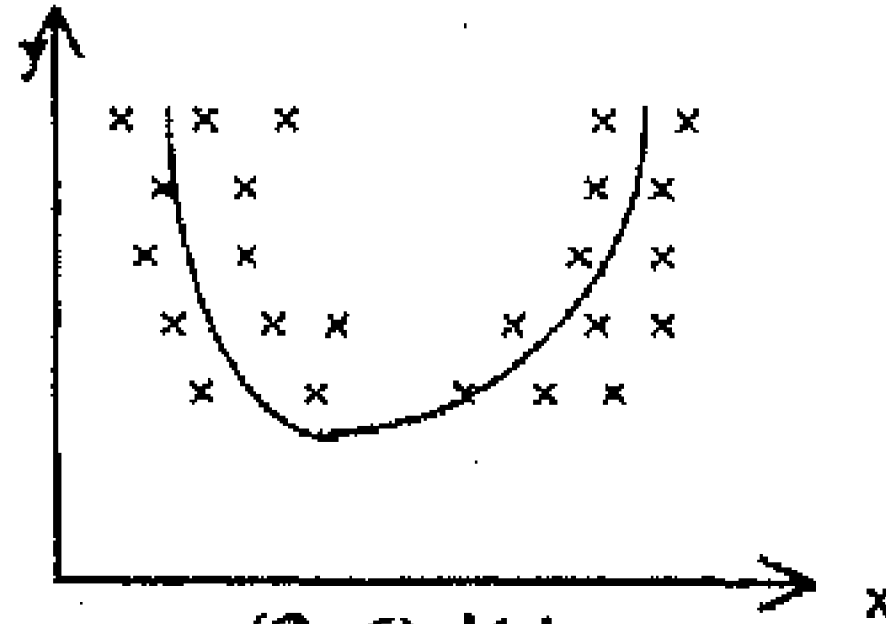
شكل (3-4)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن (أن العلاقة عكسية سالبة) والعلاقة ضعيفة



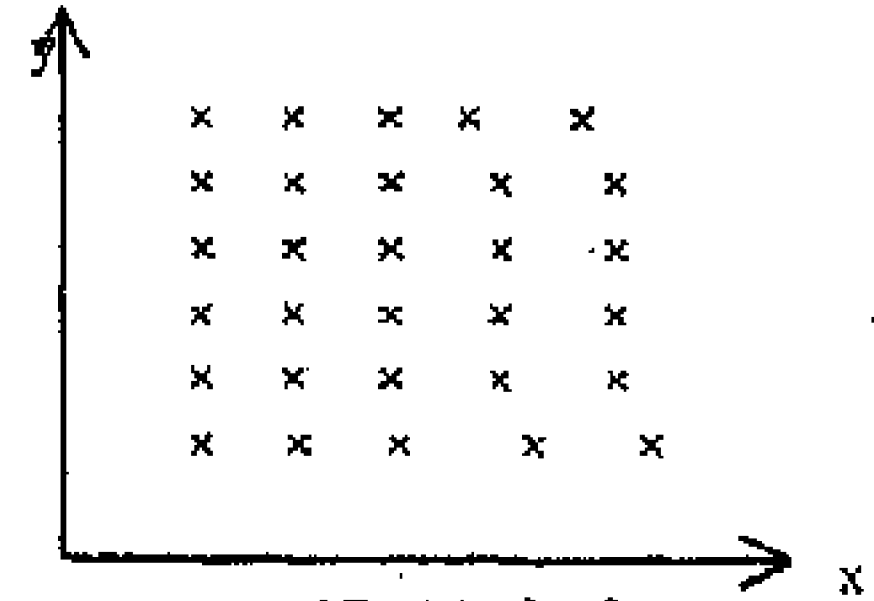
شكل (3-3)

نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير إلى (أن العلاقة عكسية سالبة) والعلاقة قوية



شكل (3-6)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فإننا نقول أن العلاقة ليست خطية وإنما من الدرجة الثانية



شكل (3-5)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين  $x, y$

## 2- معامل الارتباط وخصائصه

كما أسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز  $r$  وهذا سيتخذ قيمة عددية تتراوح بين  $-1 \leq r \leq 1$  وإذا وجد قيمة أكبر أو أصغر من هذه الحدود دلالة على أن هناك خطأ حسابي قد تم، وللمعامل دلالات تواردها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

- (1) إذا كانت  $r = -1$  فإن العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.
- (2) إذا كانت  $-1 < r < 0$  فإن العلاقة تكون علاقة عكسية.
- (3) إذا كانت  $r = 0$  فهذا يعني أنه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين.
- (4) إذا كانت  $0 < r < 1$  فهذا يعني أنه يوجد علاقة إيجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.

5) عندما تكون  $r=1$  فإن العلاقة تكون علاقة تامة.

3.3 طرق إيجاد معامل الارتباط: نجد معامل الارتباط بطريقة 3.3.1. معامل ارتباط بيرسون: لإيجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة

- نجد  $\sum x, \sum y$

- نجد  $\sum x^2$  أي مربع كل مشاهدة من  $x$  ثم المجموع.

- نجد  $\sum y^2$  أي مربع كل مشاهدة في  $y$  ثم المجموع

- نجد معامل الارتباط من العلاقة  $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right)}}$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right)}}$$

مثال (3-1): إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين  $x, y$

x	1	2	3	4	5	15	المجموع
y	3	6	9	12	15	45	

جدول (3-6)

المطلوب: إيجاد معامل الارتباط

الحل: نشكل الجدول التالي والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	x	y	xy	$x^2$	$y^2$
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3	9	27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (2-6)

من البيانات اعلاه نجد قيمة  $r$

$$r_{x,y} = \frac{165 - \frac{15 \times 45}{5}}{\sqrt{\left(55 - \frac{15 \times 15}{5}\right)\left(995 - \frac{45 \times 45}{5}\right)}}$$

$$\frac{30}{\sqrt{10 \times 90}} = \frac{30}{\sqrt{900}} = \frac{30}{30} = 1$$

أي ان الارتباط ايجابي تام

مثال (3-2) : البيانات التالية تمثل قيم  $x, y$  مرتبة في الجدول (3-3)

المجموع							
26	7	5	4	7	3	x	
30	8	6	8	6	2	y	

جدول (3-3)

المطلوب ايجاد معامل الارتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (3-4) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	x	y	xy	$x^2$	$y^2$
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (3-4)

من البيانات اعلاه نجد قيمة  $r$  من العلاقة

$$r = \frac{166 - \frac{30 \times 26}{5}}{\sqrt{\left(148 - \frac{26 \times 26}{5}\right)\left(204 - \frac{30 \times 30}{5}\right)}}$$



$$= \frac{166 - 156}{\sqrt{(148 - 135.2)(204 - 180)}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{128 \times 24}} = \frac{10}{\sqrt{307.2}} = \frac{10}{17.35} = 0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين x,y ايجابي (طردي) متوسط  
 مثال (3-3): البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين x,y كما في الجدول (3-5) .

المجموع						
47	15	12	9	7	4	x
31	2	4	5	9	11	y

جدول (3-5)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين x,y  
 الحل: نشكل الجدول (3-6) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	x	y	xy	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (3-6)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{230 - \frac{31 \times 47}{55}}{\sqrt{\left(515 - \frac{47 \times 47}{5}\right) \left(274 - \frac{31 \times 31}{5}\right)}} \\
 &= \frac{230 - 291.4}{\sqrt{(515 - 441.8)(274 - 192.2)}} \\
 &= \frac{-61.4}{\sqrt{73.2 \times 54.8}} = \frac{-61.4}{63.34} = -0.97
 \end{aligned}$$

وهذا ارتباط سلبي قوي

### 3-3-2 إيجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لذا نتبع الخطوات التالية

- نجد  $\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

- نجد  $S_x$  ثم  $S_y$  أو قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y} \quad \dots\dots(3-6)$$

مثال (3-4): من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 47, S_x = 16, S_y = 5, n = 5$$

$$r = \frac{1}{5} \times \frac{47}{16 \times 5} = \frac{47}{400} = 0.12 \quad \text{الحل: نطبق العلاقة}$$

∴ وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

### 3-3-3 معامل ارتباط سبيرمان للرتب:

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل..

- نجد ترتيب البيانات المعطاة سواء كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين x,y ونرمز لهما بالرموز  $x'$  ،  $y'$  .

- نجد  $d = x' - y'$  أي نجد الفرق بين الترتيب المناظرة

- . نأخذ مربع d ثم المجموع  $\sum_{i=1}^n d_i^2$

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

نطبق العلاقة

مثال (3-5) : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في إحدى الشركات وكانت مرتبة كما في الجدول (3-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد

جدول (3-7)

الحل: نشكل الجدول (3-8) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	x	y	$x'$	$y'$	$d = x' - y'$	$d^2$
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	-2	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	-1.5	2.25
4	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	-2	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	-4.5	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	2.5	6.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	-2	4.00
المجموع						60.50

جدول (3-8)

- نرتب التقادير اعلاه كما ورد في  $x', y'$

- نجد  $d = x' - y'$

- نجد مربع  $d$  ثم المجموع  $\sum d^2$  - ثم نطبق العلاقة

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{660.5}{10(100 - 1)} = 1 - \frac{363}{990} = 1 - 0.37 = 0.63$$

وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه الترتيب ونأخذ متوسطها الحسابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في  $x'$ .  
فمثلاً عند ترتيب قيم  $x$  لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1، 2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو  $\frac{2+1}{2} = 1.5$  فيوضع في عمود  $x \times 1.5$  امام التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم  $y', x'$  لباقي التقادير.

مثال (3-6): البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء والرياضيات وهي كما في الجدول (3-9)

87	75	60	90	88	80	95	90	75	85	درجة الاحصاء $x$
83	70	65	85	72	80	75	75	85	80	درجة الرياضيات $y$

جدول (3-9)

أوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (3-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء x	درجة الرياضيات y	رتبة $x = x'$	رتبة $y = y'$	$d_i = x'_i - y'_i$	$d_i^2$
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	-6.0	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	-4	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	-0.5	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					998.5

جدول (3-10)

بعد إيجاد هذه البيانات نطبق العلاقة

$$r_{s,p} = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

- ثم نطبق العلاقة

$$= 1 - \frac{6(98.5)}{10(100 - 1)} = 1 - \frac{591}{990}$$

$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

∴ الارتباط ضعيف بين المتغيرين x,y وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للرتب.

#### 3-4 مفهوم الانحدار:

هو إيجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين  $x, y$  تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية لكل من  $x, y$  حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة للرياضية خطية بصورتين.

(ا) إذا كان الانحدار من  $y$  على  $x$  فإن المعادلة هي

$$\hat{y} = ax + b \quad (3-4) \dots\dots\dots$$

المطلوب هو التعرف على قيم  $a, b$  لصياغة المعادلة وتسمى  $a$ : معامل الانحدار أو ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية بينما  $b$ : نقطة تقاطع الانحدار مع المحور الرأسي ويمكن إيجاد قيم  $a, b$  من العلاقة.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

ثم نجد  $b$  من العلاقة

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

حيث  $x', y'$  هو المتوسط الحسابي للظاهرة  $x$ ، الظاهرة  $y$ .  
(ب) لإيجاد معادلة انحدار  $x$  على  $y$  فإننا نكتب المعادلة التالية :

$$\hat{x} = a'y + b'$$

ولإيجاد قيم  $a', b'$  من العلاقة :

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}} \quad \dots\dots\dots(3-7)$$

ولايجاد  $b'$  نجدة من العلاقة

$$b' = x' - a'y' \quad \dots\dots(3-8)$$

3-5 : العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط:

$$r^2 = a \times a'$$

وهذا ما نسميه بمعامل التحديد ولتوضيح ما سبق نورد الأمثلة التالية:

مثال (3-7): البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما مرتبة في الجدول (3-11)

25	20	18	15	20	اجور اسبوعية x
20	15	18	14	15	نفقات اسبوعية y

جدول (3-11)

والمطلوب ايجاد .

- معامل ارتباط بيرسون
- معادلة انحدار  $y/x$  أي انحدار  $y$  على  $x$  باستخدام القانون العام والمربعات .
- معادلة انحدار  $x/y$  أي  $x$  على  $y$  .
- معامل الارتباط من معامل انحدار  $y$  على  $x$ ,  $x$  على  $y$  ثم قارن نتيجة  $d$  مع نتيجة  $a$
- اوجد معادلة انحدار  $y$  على  $x$  من الدرجة الثانية
- اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار .

الحل: نكون الجدول (3-12) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

$x^4$	$x^3$	$x^2y$	$y^2i$	$x^2i$	$xiyi$	$y_i$	$x_i$
160000	8000	6000	225	400	300	15	20
50625	3375	3150	16	225	210	14	15
104976	5832	5832	324	324	324	18	18
16000	8000	6000	225	400	300	15	20
30625	15625	12500	400	625	500	20	25
866226	40832	33482	1370	1974	1634	82	98

جدول (3-12)

(حيث الصف الأخير يمثل المجموع)

أ- نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{\sqrt{\left(1974 - \frac{98 \times 98}{5}\right) \left(1370 - \frac{82 \times 82}{5}\right)}} \\
 &= \frac{1607.2 - 1634}{\sqrt{(1964 - 1920.8)(1370 - 1344.8)}} \\
 &= \frac{26.8}{\sqrt{53.2 \times 25.2}} = \frac{26.8}{\sqrt{340.64}} \\
 &= \frac{26.8}{36.61} = 0.73
 \end{aligned}$$

وهذا معامل ارتباط جيد

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{1974 - \frac{98 \times 98}{5}} \\
 &= \frac{1634 - 1607.2}{1947 - 1920.8} \\
 &= \frac{26.8}{53.2} = 0.5
 \end{aligned}$$



$$\therefore a=0.5$$

$$\bar{x} = 19.6, \bar{y} = 16.4$$

ولإيجاد  $b$  نجد

ثم نجد قيمة  $b$  من العلاقة التالية:

$$\begin{aligned} b &= \bar{y} - a\bar{x} = 16.4 - 0.5 \times 19.6 \\ &= 16.4 - 9.8 \\ &= 6.6 \end{aligned}$$

معادلة انحدار  $y/x$  هي:

$$\hat{y} = 0.5x + 6.6$$

c) ولإيجاد معادلة انحدار  $x$  على  $y$  نجد أولاً

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1634 - \frac{98 \times 82}{5}}{1370 - \frac{82 \times 82}{5}} \\ &= \frac{1634 - 1607.2}{1370 - 1344.8} \\ &= \frac{26.8}{25.2} = 1.06 \\ \therefore a' &= 1.06 \end{aligned}$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

$$= 19.6 - 1.06 \times 16.4$$

$$= 19.6 - 17.384 = 2.216$$

$$x = 1.06y + 2.216$$

لإيجاد معادلة من العلاقة

وعليه فإن المعادلة المطلوبة

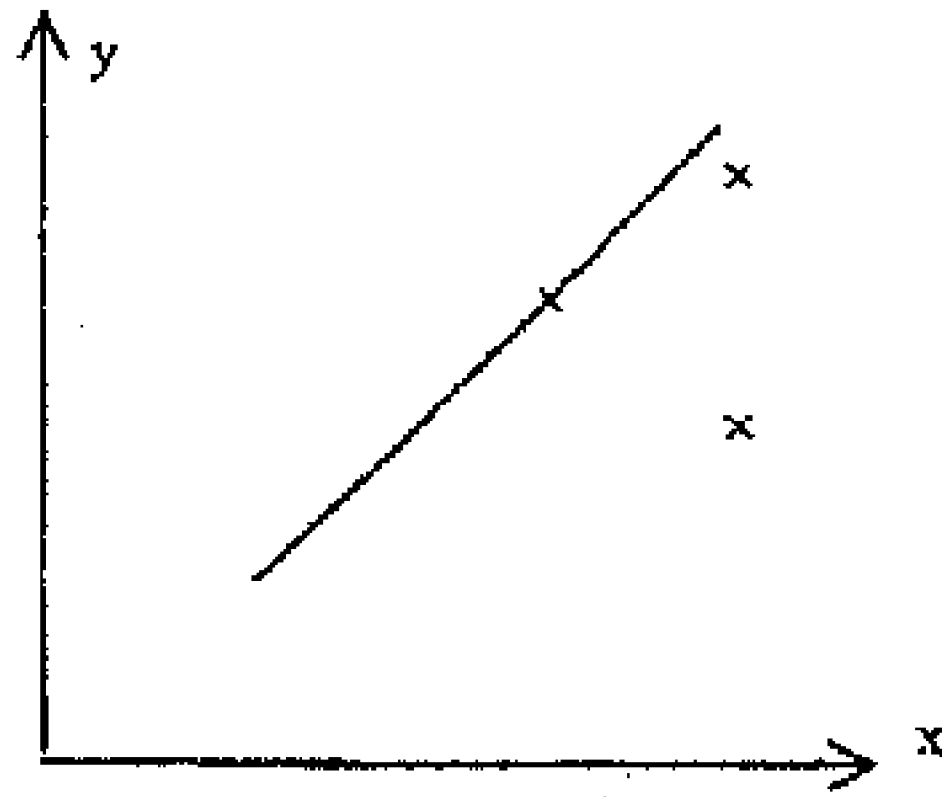
d) نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r^2 = a \times a'$$

$$= 0.5 \times 1.06 = 0.53$$

$$\therefore r = \sqrt{0.53} = 0.73$$

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار الموضح في شكل (3-7)



والخط المبين يمر بأغلب النقاط

شكل (3-7)

(2) أ- معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2}{n} \right)}}$$

a)

$$\begin{aligned} r &= \frac{28416 - \frac{368 \times 383}{5}}{\sqrt{\left( 27454 - \frac{368 \times 368}{5} \right) \left( 29701 - \frac{383 \times 383}{5} \right)}} \\ &= \frac{28416 - 28188.8}{\sqrt{(27454 - 27084.8)(29701 - 29337.8)}} \\ &= \frac{227.2}{\sqrt{363.2 \times 369.2}} \\ &= \frac{227.2}{366.1} = 0.62 \end{aligned}$$

ب- معامل ارتباط سبيرمان كطريقة اخرى.

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 8}{5(25 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{48}{120} = 1 - 0.4 = 0.6$$

(3) ان معادلة خط انحدار  $y$  على  $x$  هي

$$\hat{y} = ax + b$$

يتم تحديد كل من  $a, b$  من العلاقات التالية

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n}}$$

$$= \frac{227.2}{369.2} = 0.62$$

ثم نجد  $b$  من العلاقة

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 76.6 - 0.62 \times 73.6$$

$$= 76.6 - 45.6 = 31$$

$$\hat{y} = 0.62x + 31$$

∴ المعادلة المطلوبة هي:

$$x = a'y + b'$$

لايجاد معادلة انحدار  $x$  على  $y$  تكون

وبإيجاد الثوابت  $a', b'$  تكون

$$a' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n}} = \frac{227.2}{363.3} = 0.63$$

ثم نجد  $b'$  من العلاقة

$$\begin{aligned} b' &= \bar{x} - a' \bar{y} \\ &= 73.6 - 76.6 \times 0.63 \\ &= 73.6 - 48.3 = 25.3 \end{aligned}$$

$$\hat{x} = 0.63y + 25.3$$

وتكون المعادلة المطلوبة هي

(5) لايجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \sqrt{a \times a'} = \sqrt{0.62 \times 0.63} = 0.621$$

(6) لتقدير معدل طالب في الثانوية العامة نعوض عن معدله في السنة الاولى.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= 0.63 \times 88 + 25.3 \\ &= 55.44 + 25.36 \\ &= 80.84 \end{aligned}$$

(7) لتقدير معدل طالب في السنة الاولى نعوض عن معدله في الثانوية العامة.

$$\hat{y} = 0.62 \times 76 + 31 = 78.12$$

(3-6) معامل الاقتران

تعريف (3-1): هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين لها اوضاع مختلفة لا تتعدى حالتين وتكون الصورة العامة لها كما في جدول (3-15).

II	I	الظاهرة الثانية
		الظاهرة الاولى
$X_{21}$	$X_{11}$	a
$X_{22}$	$X_{21}$	b

جدول (3-15)

أو في جدول (3-16)

2	1	الظاهرة الثانية الظاهرة الأولى
b	a	I
d	c	II

جدول (3-16)

مثال (3-13): البيانات التالية تمثل وضع الانتاجية وعلاقتها مع وجود الحوافز في مؤسسة صناعية معينة مبينة بالجدول (3-16)

وجود الحوافز وضع الانتاجية	موجود	غير موجود
تحسنت	16	9
لم تتحسن	2	10

جدول (3-17)

المطلوب: ايجاد معامل الاقتران بين المتغيرين اي بين وجود الحوافز ووضع الانتاجية

$$\frac{16 \times 10 - 2 \times 9}{16 \times 10 + 2 \times 9} = \frac{160 - 18}{160 + 18}$$

$$= \frac{142}{178} = 0,978$$

وهذا يؤكد وجود ارتباط قوي بين ظاهرة الحوافز والانتاجية

3-7 (معامل التوافق):

تعريف (2-3): هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين مختلفتين بحالات مختلفة تزيد عن اثنتين

ويمكن ايجاده من العلاقة التالية

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + n}} = \text{معامل التوافق} \quad \dots\dots(3-11)$$

نجد اولا  $x^2$  وهنا  $n$  تشير الى العدد الكلي لافراد الظاهرة قيد الدراسة

مثال(3-14): البيانات التالية تمثل توزيع الذكور والاناث على ثلاث كليات في جامعة ما مبينة بالجدول (3-18).

الكليات	صنف الطلاب		المجموع
	ذكور	اناث	
كلية العلوم الانسانية	1059	446	1505
كلية العلوم الطبيعية	283	119	402
كلية العلوم التطبيقية	860	361	1221
المجموع	2202	926	3128

جدول (3-18)

الحل: نجد اولا القيم المتوقعة لقيم المشاهدات ونضعها ضمن مربعات صغيرة في أي زاوية نشاء.  
القيمة المتوقعة

$$x'_{12} = \frac{1505 \times 926}{3128} = 446$$

$$x'_{11} = \frac{1505 \times 2202}{3128} = 1059$$

$$x'_{22} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 119$$

$$x'_{21} = \frac{402 \times 2202}{3128} = 283$$

$$x'_{32} = \frac{1221 \times 926}{3128} = 106$$

$$x'_{33} = \frac{1221 \times 2202}{3128} = 860$$

فحسب قيمة  $x^2$

$$x^2 = \frac{(908 - 1059)^2}{1059} + \frac{(597 - 446)^2}{446} + \frac{(179 - 283)^2}{283} + \frac{(119 - 223)^2}{119} + \frac{(1115 - 860)^2}{860} + \frac{(106 - 361)^2}{361} = 457.499$$

$$\sqrt{\frac{457.499}{3138 + 457.499}} = 0.3572 = \text{معامل التوافق}$$

أي ان الارتباط بين ظاهرة اختيار الكلية وظاهرة الجنس من حيث الذكور والإناث هو ارتباط ضعيف.

مثال (3-15): البيانات التالية تمثل توزيع 270 مفردة بين الألوان والجنس مبينة بالجدول (6-19)

اللون	الجنس		المجموع
	ذكر	انثى	
بنى	80	40	120
وردي	30	50	80
أزرق	40	30	70
المجموع	150	120	270

جدول (6-19)

المطلوب: (1) ماهو نوع المتغيرين قيد الدراسة.

(2) حساب معامل التوافق بين اللون والجنس.

الحل: تكون جدول الحل

(1) نوع المتغيرين قيد الدراسة هي متغيرات تدل على الصفات (متغيرات وصفية)

(2) نجد أولاً  $x^2$

$$x'_{11} = \frac{120 \times 150}{270} = 67$$

$$x'_{12} = \frac{120 \times 120}{270} = 53$$

$$x'_{21} = \frac{80 \times 150}{270} = 44$$

$$x'_{22} = \frac{80 \times 120}{270} = 36$$

$$x'_{13} = \frac{70 \times 120}{270} = 39 \quad x'_{32} = \frac{70 \times 120}{270} = 31$$

$$x^2 = \frac{(80-67)^2}{67} + \frac{(40-53)^2}{53} + \frac{(30-44)^2}{44} + \frac{(50-36)^2}{36} + \frac{(40-39)^2}{39} + \frac{(30-31)^2}{31} = 15.666$$

$$\sqrt{\frac{15.666}{15.666 + 270}} = 0.234 = \text{معامل التوافق}$$

وهذا يعني ان الارتباط ضعيف



### 3-8 الارتباط الجزئي والمتضاعف:

قبل الخوض في الارتباط الجزئي والمتضاعف نرى من المفيد مراجعة المبادئ الأساسية للارتباط البسيط لمتغيرين يرتبطان بقاعدة خطية من النوع

$$Y_c = a + bX$$

وقد وجدت هذه العلاقة بطريقة المربعات الصغرى .

وهذا سمح لنا أن نحسب تقديرًا للمتغير المرتبط وهنا نعني بالمتغير المرتبط  $Y_c$  من قيم المتغير المستقل وتالياً صرح بأن الاختلاف الكلي لقيم المتغير المرتبط ما هو إلا

(1) الاختلاف المفسر + الاختلاف غير المفسر (أي الذي فشلنا في تفسيره بالفرضية) أي أن

$$\sum y^2 = \sum y_c^2 + \sum y_s^2$$

$$\sum y_c^2 = \sum Y_c^2 - \bar{Y} \sum Y$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \bar{Y} \sum Y,$$

وعلينا أن نذكر بأن  
وأن  
وهنا

$$\sum Y_c^2 = a \sum Y + b \sum XY$$

وبشكل أكثر بساطة فإن

$$\sum y_c^2 = b \sum xy$$

بينما الخطأ المعياري للمقدر الذي سنرمز له بالرمز  $s_{y,x}$  والذي يمكن إيجاده من العلاقة

$$S_{y,x} = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}}$$

ساعدنا لان نحكم على مدى الخطأ لمقدراتنا للمتغير المرتبط . ويمكن الحصول على

$$\sum y_s^2 = \sum y^2 - \sum y_c^2$$

واخيرا يمكن التعرف على مقياس آخر سمح لنا بان نحدد النسبة بين الاختلاف المفسر إلى الاختلاف الكلي وهذه النسبة تعرف بما يسمى معامل التحديد والذي سنرمز له بالرمز  $r^2$  ويكتب على الصورة .

$$r^2 = \frac{\sum y_c^2}{\sum y^2}$$

والجذر التربيعي لهذا المعامل ما يعرف بمعامل الارتباط .

### 3-8-1 الارتباط المتضاعف :

إن القواعد والأسس في إيجاد معامل الارتباط البسيط هي نفسها في الارتباط المتضاعف . لكن الطريقة فيها صعوبة وشغل أكثر . لان هناك أكثر من متغير مستقل ونحتاج إلى استخدام رموز مختلفة وأكثر دقة . والتوضيح في هذا الفصل يتعلق بالمثال التالي

مثال (3-16): أجريت دراسة على المستوى التحصيلي لعشرة طلاب ومدى ارتباطه بالدخل الشهري لكل طالب واجرة البيت الشهرية وساعات الدراسة اليومية لكل طالب وساعات الراحة التي يقضيها الطالب وجمعت البيانات الواردة في الجدول (3-20)

رقم الطالب	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
1	72	5	50	130
2	54	6	45	100
3	65	7	35	80
4	70	6	60	145
5	80	4	30	139
6	75	3	35	120
7	65	7	40	115
8	90	5	35	110
9	65	6	25	90
10	70	5	25	75
$\Sigma X$	706	54	380	1104
$\bar{X}$	70.6	5.4	38	110.4

جدول (3-20)

والمطلوب إيجاد معامل الارتباط البسيط والجزئي والمتضاعف لمختلف المتغيرات.

الحل يكون أولاً جدول الحل (3-21)

الرقم	$X_1^2$	$X_2^2$	$X_3^2$	$X_4^2$	$X_1X_2$	$X_1X_3$	$X_1X_4$	$X_2X_3$	$X_2X_4$	$X_3X_4$
1	5184	25	2500	16900	360	3600	9360	250	650	6500
2	2916	36	2025	10000	324	2430	5400	270	600	4500
3	4225	49	1225	6400	455	2275	5200	245	560	2800
4	4900	36	3600	21025	420	4200	10150	360	870	8700
5	6400	16	900	19321	320	2400	11120	120	556	4170
6	5625	9	1225	14400	225	2625	9000	105	360	4200
7	4225	49	1600	13225	455	2600	7475	280	805	4600
8	8100	25	1225	12100	450	3150	9900	175	550	3850
9	4225	36	625	8100	390	1625	5850	150	540	2250
10	4900	25	625	5625	350	1750	5250	125	375	1875
$\Sigma$	50700	306	15550	127096	3749	26655	78705	2080	5866	43445

جدول (3-21)

وهنا وبعد إعداد الجدول (3-21) سنبين مفهوم معنى بعض الرموز المستخدمة وهنا سنعتبر أن  $X_1$  هو المتغير المرتبط والذي نجد قيمته بمعلومية قيم المتغيرات المستقلة الأخرى ونبين أدناه أن المتغيرات وما يقابلها من مفاهيم

$X_1$	المعدل الفصلي
	المتغيرات المستقلة
$X_2$	ساعات الدراسة اليومية
$X_3$	أجرة البيت
$X_4$	الدخل الشهري للطالب

وسنبدأ في الصفحات التالية بالمتغيرات  $X_1, X_2, X_3$  وبعد عرض للأفكار الرئيسية في هذا المجال وممارسة العمليات الحسابية وتبيان كيفية استخدام العلاقات الرياضية لهذه الحسابات نقدم المتغير الرابع وتعتبر الخطوة الأولى في طريقة الارتباط هو أن نحصل على معادلة تحتوي على متغيرات مستقلة لتقدير المتغير المرتبط وفي مثالنا فإن المتغيرات المستقلة التي سنتناولها أولاً هي  $X_2, X_3$  لتقدير  $X_1$ . وسنرمز لهذا المقدّر بالرمز  $X_{c1.23}$  ويعني هذا الرمز أن  $X_1$  المقدّر والمحسوب أو المعتمد على  $X_2, X_3$  ولأنهما متغيرين مستقلين سيكون لدينا  $b$  اثنتين وسيكون نوع المعادلة على النحو التالي

$$X_{c1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

وكلمة تتعلق بمعنى  $b$  وترميزها ضروري وهذه الشبكة من معاملات التقدير تشير إلى التأثير على  $X_1$  عندما يسمح حدوث تغيير على المتغير المستقل المصاحب للمتغير الآخر. لذا فإن  $b_{12.3}$  هي مقدّر الاختلاف في معدل الطالب السنوي مع ساعات الدراسة اليومية وبقاء المتغير الذي يمثل أجرة المنزل ثابتاً وبشكل عام ففي الرمز  $b_{12.3}$  رقم المتغير الذي يقع على يمين الفاصلة العشرية هو الذي يبقى ثابتاً. وكلما قدمنا عوامل أكثر فأكثر فإن هذه الحالة المرغوبة تصبح أقرب فأقرب. والثابت  $a_{1.23}$  هي القيمة الفرضية لمعدل الطالب السنوي عندما تكون باقي العوامل صفراً.

وعليّنا أن نلاحظ عند هذه النقطة أن عالم العلوم الطبيعية غالباً ما يستطيع أن يصمم تجربة لكي يسيطر على مجموعة من المتغيرات على سبيل المثال الحرارة والرطوبة أو ضغط الهواء وكذلك عالم الأحياء والزراعة يستطيعوا السيطرة على متغيراتهم إلى درجة مقبولة. ومن ناحية أخرى فإن الاقتصاد وعلم الاجتماع والعلوم الاجتماعية الأخرى وبشكل عام عليهم أن يستخدموا طرق المشاهدة بدلاً من طرق التجربة. ولأن العاملين في هذه الميادين لديهم السيطرة القليلة وإذا أحدهم تغلب على المادة التي يجب أن يستخدموها عليهم أن يثبتوا

بعض المتغيرات إحصائيا وباستخدام الطرق الفنية التي شرحت سابقا فان مجموع التغيرات (الاختلافات) للسلسلة المعتمدة هي عبارة عن مجموع كميتين

- (1) الاختلافات في القيم المقدرة لتلك السلسلة عن وسطها الحسابي
- (2) الاختلافات في القيم الحقيقية لتلك السلسلة عن القيم المقدرة أي

$$\sum x^2_1 = \sum x^2_{e1.23} + \sum x^2_{s1.23}$$

وعليه فان العملية الحسابية لحساب القياسات للعلاقات هي في الأساس نفسها في الارتباط البسيط. والخطأ القياسي في التقدير هو

$$S_{1.23} = \sqrt{\frac{\sum x^2_{s1.23}}{N}}$$

ومعامل التحديد المضاعف والذي سنرمز له بالرمز  $R^2$

$$R^2_{1.23} = \frac{\sum x^2_{e1.23}}{\sum x^2_1}$$

وينص على انه النسبة بين مجموع التغيرات الموجودة إلى التغيرات المحسوبة أو قيم  $X_{e1.23}$  والتي فسرت من قبل المتغيرات المستقلة ومعامل الارتباط المضاعف والذي سنرمز له بالرمز  $R$  ويكون ليس له إشارة ومن الجدير بالاهتمام أن نلاحظ في هذه النقطة انه كلما أضيف متغيرات مستقلة مصاحبة للمتغير المرتبط في أي مسألة فان

$$R_{1.23} \dots \dots \dots m \rightarrow 1,$$

$$S_{1.23} \dots \dots \dots m \rightarrow 0.$$

وعندما تقترب قيمة

$$R_{1.23} \dots \dots \dots m \rightarrow 1$$

فأننا نكون قد استطعنا الحصول على تقديرات كاملة للمتغير  $X_1$

**3-8-2 : الارتباط الجزئي:** إن معامل التحديد الجزئي ما هو إلا النسبة

(1) في الزيادة في الاختلاف بين القيم المحسوبة للمتغير المرتبط الناتج عن تقديم متغير مستقل إلى الاختلاف الذي لم يفسر قبل تقديم المتغير.

نجد معاملات الارتباط البسيط لمختلف المتغيرات على اعتبار أن أحدها متغيرا مستقلا والآخر متغيرا مرتبطا والذي سبق وأن تناولناه بصيغ مختلفة في بداية الفصل الثالث وهي كما يلي :

$$r_{12} = \sqrt{\frac{\sum x_{c1.2}^2}{\sum x_1^2}} = \sqrt{\frac{190.74}{856.4}} = 0.47, r^2_{12} = 0.22$$

$$r_{13} = \sqrt{\frac{\sum x_{c1.3}^2}{\sum x_1^2}} = \sqrt{\frac{27.68}{856.4}} = 0.18, r^2_{13} = 0.0324$$

$$r_{14} = \sqrt{\frac{\sum x_{c1.4}^2}{\sum x_1^2}} = \sqrt{\frac{114.33}{856.4}} = 0.37, r^2_{14} = 0.13$$

$$r_{23} = \sqrt{\frac{\sum x_{c2.3}^2}{\sum x_2^2}} = \sqrt{\frac{0.84}{14.4}} = 0.24, r^2_{23} = 0.06$$

$$r_{24} = \sqrt{\frac{\sum x_{c2.4}^2}{\sum x_2^2}} = \sqrt{\frac{0.03}{14.4}} = 0.05, r^2_{24} = 0.002$$

$$r_{34} = \sqrt{\frac{\sum x_{c3.4}^2}{\sum x_3^2}} = \sqrt{\frac{432.97}{1110}} = 0.62, r^2_{34} = 0.39$$

وبتربيع معاملات الارتباط نحصل على ما يسمى بمعاملات التحديد هذا وسنجد أدناه حسابات أخرى تفيدنا في إيجاد معاملات أخرى على النحو التالي:

$$1 - r^2_{12} = 1 - 0.22 = 0.78, \sqrt{1 - r^2_{12}} = 0.88$$

$$1 - r^2_{13} = 1 - 0.03 = 0.97, \sqrt{1 - r^2_{13}} = 0.98$$

$$1 - r^2_{14} = 1 - 0.13 = 0.87, \sqrt{1 - r^2_{14}} = 0.93$$

$$1 - r^2_{23} = 1 - 0.06 = 0.94, \sqrt{1 - r^2_{23}} = 0.95$$

$$1 - r^2_{24} = 1 - 0.002 = 0.998, \sqrt{1 - r^2_{24}} = 0.999$$

$$1 - r^2_{34} = 1 - 0.39 = 0.61, \sqrt{1 - r^2_{34}} = 0.78$$

وكل معاملات الارتباط ومعاملات التحديد التي حسبت هي معاملات من الرتبة الصفرية

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0.18 - (0.47)(0.24)}{(0.88)(0.89)} = \frac{0.18 - 0.11}{0.78}$$

$$= \frac{0.07}{0.78} = 0.09$$

$$r_{14.2} = \frac{r_{14} - r_{12}r_{24}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.37 - (0.47)(0.05)}{(0.88)(0.999)} = \frac{0.37 - 0.02}{0.88}$$

$$= \frac{0.35}{0.88} = 0.4$$

$$r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{0.37 - (0.18)(0.39)}{(0.98)(0.78)} = \frac{0.37 - 0.07}{0.76}$$

$$= \frac{0.3}{0.76} = 0.39$$

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0.47 - (0.18)(0.24)}{(0.98)(0.89)} = \frac{0.47 - 0.04}{0.87}$$

$$= \frac{0.43}{0.87} = 0.49$$

$$r_{13.4} = \frac{r_{13} - r_{14}r_{34}}{\sqrt{1-r_{14}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{0.18 - (0.37)(0.62)}{(0.93)(0.78)} = \frac{0.18 - 0.23}{0.73}$$

$$= \frac{-0.05}{0.73} = -0.07$$

$$r_{12.4} = \frac{r_{12} - r_{14}r_{24}}{\sqrt{1-r_{14}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.47 - (0.37)(0.05)}{(0.93)(0.999)} = \frac{0.47 - 0.02}{0.93}$$

$$= \frac{0.45}{0.93} = 0.48$$

$$r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}r_{34}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{34}^2}} = \frac{0.05 - (0.24)(0.62)}{(.89)(0.999)} = \frac{0.05 - 0.15}{0.69}$$

$$= \frac{-0.1}{0.69} = -0.14$$

$$r_{34.2} = \frac{r_{34} - r_{23}r_{24}}{\sqrt{1-r_{23}^2}\sqrt{1-r_{24}^2}} = \frac{0.62 - (0.24)(0.05)}{(0.89)(0.999)} = \frac{0.62 - 0.01}{0.89}$$

$$= \frac{0.61}{0.89} = 0.69$$

ومن المفيد هنا حساب القيم التالية والتي سنستخدمها في العلاقات اللاحقة وهذه القيم هي

$$r^2_{13.2} = 0.01 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{13.2}} = 0.99$$

$$r^2_{14.2} = 0.16 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{14.2}} = 0.92$$

$$r^2_{14.3} = 0.15 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{14.3}} = 0.92$$

$$r^2_{12.3} = 0.24 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{12.3}} = 0.87$$

$$r^2_{13.4} = 0.01 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{13.4}} = 0.99$$

$$r^2_{12.4} = 0.23 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{12.4}} = 0.88$$

$$r^2_{24.3} = 0.2 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{24.3}} = 0.89$$

$$r^2_{34.2} = 0.48 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{34.2}} = 0.72$$

$$r^2_{23.4} = 0.07 \rightarrow \sqrt{1 - r^2_{23.4}} = 0.96$$

معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية

نعني بمعامل الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية هو إيجاد معامل الارتباط بين المتغير المرتبط ومتغير مستقل آخر مع ثبوت المتغيرين الآخرين.

من الممكن الحصول على معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية من معاملات الرتبة الأولى وسنقصر حساباتنا للمعاملات الجزئية من الرتبة الثانية التي تأخذ  $X_1$  هو المتغير المرتبط وهذه المعاملات هي

$$r_{14.23} = \frac{r_{14.2} - r_{13.2}r_{34.2}}{\sqrt{1 - r^2_{13.2}} \sqrt{1 - r^2_{34.2}}} = \frac{0.4 - (0.4)(0.69)}{(0.99)(0.72)} = \frac{0.34}{0.71} = 0.48$$

$$r_{13.24} = \frac{r_{13.2} - r_{14.2}r_{34.2}}{\sqrt{1 - r^2_{14.2}} \sqrt{1 - r^2_{34.2}}} = \frac{0.09 - (0.4)(0.69)}{(0.92)(0.72)} = \frac{0.09 - 0.28}{0.66} = \frac{-0.19}{0.66} = -0.29$$

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{1 - r^2_{14.3}} \sqrt{1 - r^2_{24.3}}} = \frac{0.49 - (0.39)(0.14)}{(0.92)(0.89)} = \frac{0.49 - 0.05}{0.82} = \frac{0.44}{0.82} = 0.54$$

وبشكل عام فإنه لعدد  $m$  من المتغيرات



$$r_{1m.23,\dots,(m-1)} = \frac{r_{1m.23,\dots,(m-2)} - r_{1(m-1).23,\dots,(m-2)} r_{m(m-1).23,\dots,(m-2)}}{\sqrt{1 - r_{1(m-1).23,\dots,(m-2)}^2} \sqrt{1 - r_{m(m-1).23,\dots,(m-2)}^2}}$$

معاملات الارتباط المتضاعف

يمكن الحصول على معامل الارتباط المتضاعف لثلاثة متغيرات أولا من معامل الارتباط من الرتبة الصفرية على النحو التالي

$$R^2_{1.23} = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} = \frac{(0.22) + (0.03) - 2(0.47)(0.18)(0.24)}{0.76}$$

$$= \frac{0.25 - 0.04}{0.76} = \frac{0.21}{0.76} = 0.28$$

$$R_{1.23} = \sqrt{R^2_{1.23}} = 0.53$$

$$R^2_{1.24} = \frac{r_{12}^2 + r_{14}^2 - 2r_{12}r_{14}r_{24}}{1 - r_{24}^2} = \frac{(0.22) + (0.13) - 2(0.47)(0.37)(0.05)}{0.998}$$

$$= \frac{0.35 - 0.02}{0.998} = \frac{0.33}{0.998} = 0.33$$

$$R = \sqrt{R^2_{1.24}} = 0.58$$

$$R^2_{1.34} = \frac{r_{13}^2 + r_{14}^2 - 2r_{13}r_{14}r_{34}}{1 - r_{34}^2} = \frac{(0.03) + (0.13) - 2(0.18)(0.37)(0.62)}{0.61}$$

$$= \frac{0.16 - 0.08}{0.61} = \frac{0.08}{0.61} = 0.13$$

$$R_{1.34} = \sqrt{R^2_{1.34}} = 0.36$$

$$R^2_{1.234} = r_{12}^2 + r_{13.2}^2(1 - r_{12}^2) + r_{14.23}^2(1 - R^2_{1.23})$$

$$= 0.22 + 0.01(0.88) + 0.23(0.77)$$

$$= 0.22 + 0.01 + 0.18 = 0.41$$

$$R_{1.234} = \sqrt{R^2_{1.234}} = \sqrt{0.41} = 0.64$$

ويمكن وضع هذه العلاقة بصيغتها العامة لـ  $m$  متغير على النحو

$$R^2_{1.234,\dots,m} = 1 - [(1 - r_{12}^2)(1 - r_{14.23}^2) \dots (1 - r_{1m.23,\dots,(m-1)}^2)]$$

### تمارين عامة على الفصل الثالث

(1) البيانات التالية تمثل أرقام المشاهدات  $x, y$  كما في الجدول التالي:

x	2	5	7	10	12	13	15
y	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب إيجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

(2) أوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي

x	14	8	10	12	14	16
y	12	8	7	5	3	1

(3) من البيانات المرتبة بالجدول.

x	6	8	10	12	14	2
y	2	3	4	5	6	1

والمطلوب (1) إيجاد معامل ارتباط بيرسون (2) إيجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب

(4) البيانات التالية تمثل خمسة أسر في بلد ما وفيها عدد أفراد الأسرة ودخل الأسرة واجرة السكن إضافة إلى مصروفات الأكل والشرب.

الرقم	عدد أفراد الأسرة	أجرة السكن	مصروفات الأكل والملبس	دخل الأسرة
1	3	120	180	400
2	5	70	120	210
3	7	100	150	300
4	2	80	40	250
5	3	90	150	280
6	9	110	200	430
7	5	150	200	500
8	6	70	100	180
9	4	80	115	200
10	7	60	120	185

المطلوب: (1) إيجاد معاملات الارتباط البسيط بين كافة المتغيرات.

(2) إيجاد معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الأولى على اعتبار أن عدد أفراد الأسرة هو المتغير المرتبط والتعليق عليها.

(3) إيجاد معاملات الارتباط الجزئي من الرتبة الثانية بين مختلف المتغيرات.

(4) إيجاد الارتباط المتضاعف بين مختلف المتغيرات.

(4) من البيانات المعطاة

$$\sum xy = 85, \sum x = 20, \sum y = 30, n = 5, \sum x^2 = 165, \sum y^2 = 200$$

أوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

(5) من البيانات التالية أوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب إذا كانت مبنية كما يلي.

$$\sum d^2 = 55.5, n = 6$$

س6: في مايلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء  $x, y$  على التوالي.

x	86	68	74	80	62
y	80	65	75	75	65

التمهل

- (1) حساب معامل ارتباط بيرسون (2) معامل ارتباط سبيرمان.
- (3) معادلة الانحدار  $y = ax + b$  (4) إذا علم أن أحد الطلبة قد حصل علامة (78) في الرياضيات أوجد علامة الطالب في الاحصاء.
- (5) إيجاد قيمة الرياضيات إذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.
- (6) ارسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات
- (7) ارسم خط الانحدار
- (8) تفسير معاملي  $a, b$ .



## الفصل الرابع نظرية الاحتمالات



## الفصل الرابع

### نظرية الاحتمالات

1-4 : الحادث العشوائي وتعريف الاحتمالات المختلفة :

إن الاحتمالات تتعلق بالأحداث العشوائية والأحداث غير القطعية ولتحقيق أحداث الصدفة وغير القطعية فإنها تخضع للصدفة ومثال على ذلك عند رمي حجر النرد أو قطعة النقود فإننا نكون على علم بهم بأي عدد أو أي وجهة علوي سيظهر عند إجراء التجربة. وفي بعض الأحداث فإننا نربط الصدفة بعدد معين ومثال على ذلك عند رمي قطعة نقود فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة متساو ويساوي  $\frac{1}{2}$  وهذا ما نسميه باحتمال ظهور صورة أو كتابة  $\frac{1}{2}$  وسنعبّر عن هذا الاحتمال بطريقة رمزية على النحو  $\frac{1}{2} = P(\text{صورة})$  والآن لنعطي تعريفات مختلفة للاحتتمالات.

التكرار المشاهد :

في أية تجربة وتحت نفس الشروط إذا أجريت التجربة  $n$  مرة وكان عدد مرات ظهور حادث معين هو  $m$  مرة فإن احتمال هذا الحادث هو

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \dots\dots\dots (4-1)$$

وهذا الاحتمال يسمى الاحتمال التجريبي.

أما التعريف الكلاسيكي للاحتتمال هو

تعريف (4-1): في أي تجربة إذا كان عدد النتائج المتوقعة  $N$  نتيجة وكان عدد عناصر الحادث  $A$  هو  $M$  نتيجة فإن احتمال الحادثة  $P(A)$  هو

$$P(A) = \frac{M}{N} \dots\dots\dots (4-2)$$

أو بصيغة كلامية

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني للتجربة}}$$

## 4-2 : الفضاء العيني للتجربة :

**تعريف (4-2):** الفضاء العيني هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة لهذه التجربة.  
**تعريف (4-3):** في أي تجربة إذا كانت فرضية ظهور جميع عناصر الفضاء العيني متساوية فإن احتمال ظهور كل عنصر يكون متساو وفي هذه حالة نسمى الاحتمال من هذا النوع بالاحتمال المنتظم.

وأمثلة على الاحتمال المنتظم هو احتمال ظهور أي وجه من واجهة قطعة النقود. أو حجر النرد عند إلقاءه مرة واحدة.  
فإذا كان الحدث  $A$  يمثل جميع النتائج المتوقعة من إجراء التجربة فإن

$$P(A) = 1 \quad \dots\dots\dots (4-3)$$

وتسمى مثل هذه الأحداث بالحدث التام أو الحدث القطعي.  
أما إذا كان الحدث لا يمثل أي عنصر من النتائج المتوقعة لهذه التجربة فإن احتمال

$$P(A) = 0 \quad \dots\dots\dots (4-4)$$

ونقول لمثل هذه الأحداث بالحدث المستحيل وبتوحيد العلاقة (3-3) مع العلاقة (3-4) نصل إلى العلاقة التالية :

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \dots\dots\dots (4-4)$$

### 4-2-1 : الفضاء العيني المنتهي :

**تعريف (4-4):** يقال للفضاء العيني الذي عدد عناصره منتهية بالفضاء العيني المنتهي والذي يمكن كتابته على الشكل  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  وسنرمز لاحتمال كل عنصر من عناصر الفضاء العيني  $S_i$  بالرمز  $P_i$  وبحيث أن :

$$(a) \text{ لكل } P_i \text{ فإن } 0 \leq P_i \leq 1$$

$$(b) P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$$

أما إذا كانت فرصة وقوع كل عنصر متساوية في الظهور فإن :

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = 1/n$$



وكما هو الحال في الفضاء العيني المنتهي فإن لكل عنصر  $S_i$  يقابله احتمال  $P_i$  ويحقق الشروط التالية :

$$0 \leq P_i \leq 1 \quad (a) \quad P_1 + P_2 + \dots = \sum P_i = 1 \quad (b)$$

مثال (4-1) : فصل به 10 طالبات، 6 طلاب يراد تشكيل لجنة من خمسة أشخاص والمطلوب إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني الذي يشكل هذا الفضاء واحتمال كل عنصر

الحل : عدد عناصر الفضاء العيني هو  $\binom{16}{5}$

$$\binom{16}{5} = \frac{16!}{(16-5)!5!} = 4368$$

وبما أن فرصة الوقوع متساوية فإن الاحتمال  $P = \frac{1}{4368}$

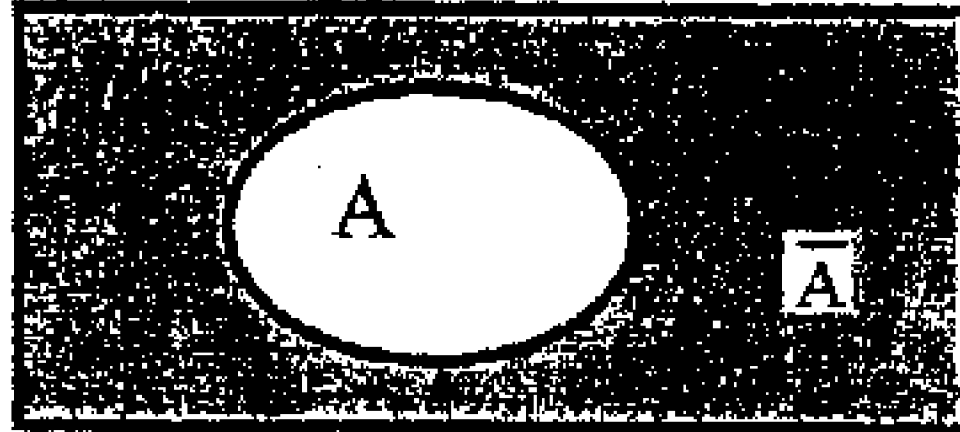
2-2-4 : الفضاء العيني غير المنتهي :

تعريف (4-6) : إذا كانت عناصر الفضاء العيني هي نقاط على خط مستقيم أو نقاط في مستوى أو غير ذلك فنقول لمثل هذا الفضاء العيني بغير المنتهي.

3-4 : الأحداث وفضاء الأحداث :

تعريف (4-7) : الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني  $S$  فإذا كان الحدث  $A$  من  $S$  فيكتب على الصورة  $A \subset S$ .

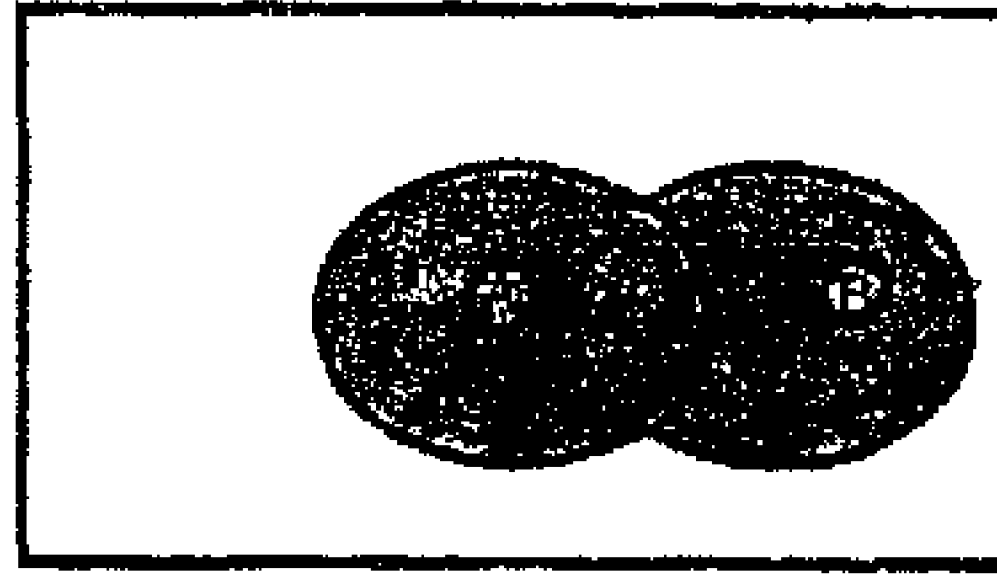
وسنستعين بأشكال فن لتوضيح مفهوم الحدث والحدث المتمم  $\bar{A}$  كما في شكل (4-1) والمنطقة المظللة تشير إلى المطلوب  $S$ .



شكل (4-1)

حيث أن شكل (4-1) يمثل قيمة  $A$ .

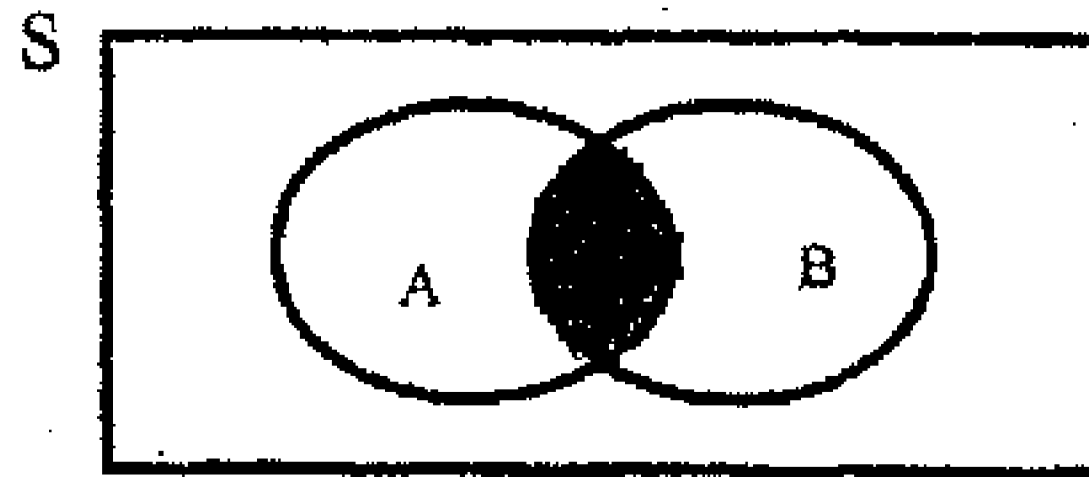
وإذا كان لدينا حدث مكون من عناصر حدثين كما هو واضح في شكل (4-2) في رمز الاتحاد.



شكل (4-2)

$A \cup B$

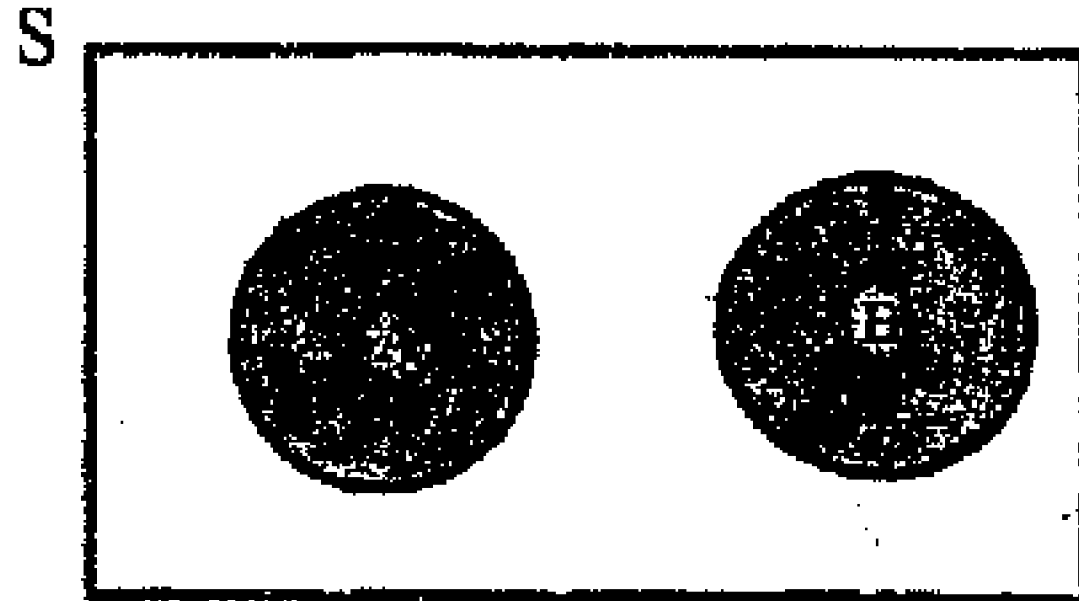
والمنطقة المظللة تمثل المطلوب. أو قد يكون الحدث ممثلاً للعناصر المشتركة بين الحدثين اسم التقاطع كما هو واضح في شكل (4-3). حيث أن المنطقة المظللة تمثل المطلوب.



شكل (4-3)

$A \cap B$

وقد يكون لدينا حدث ممثل لعناصر حدثين متباعين كما هو واضح في شكل (4-4). والمنطقة المظللة تمثل المطلوب.

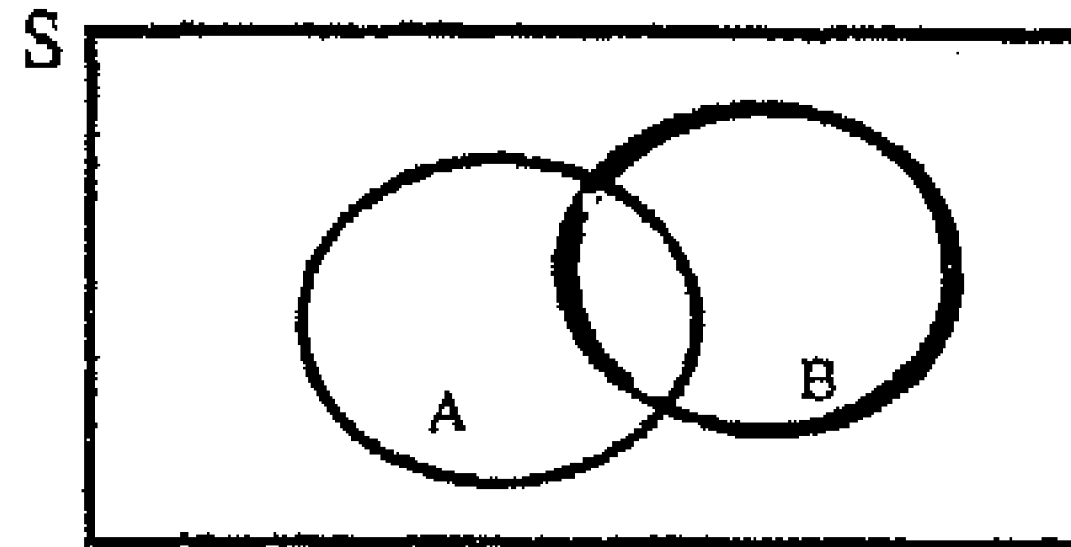


$A, B$

شكل (4-4)

حدثان منفصلان

وقد يكون الحدث مكون من الفرق بين الحدثين كما هو مبين في شكل (4-5)

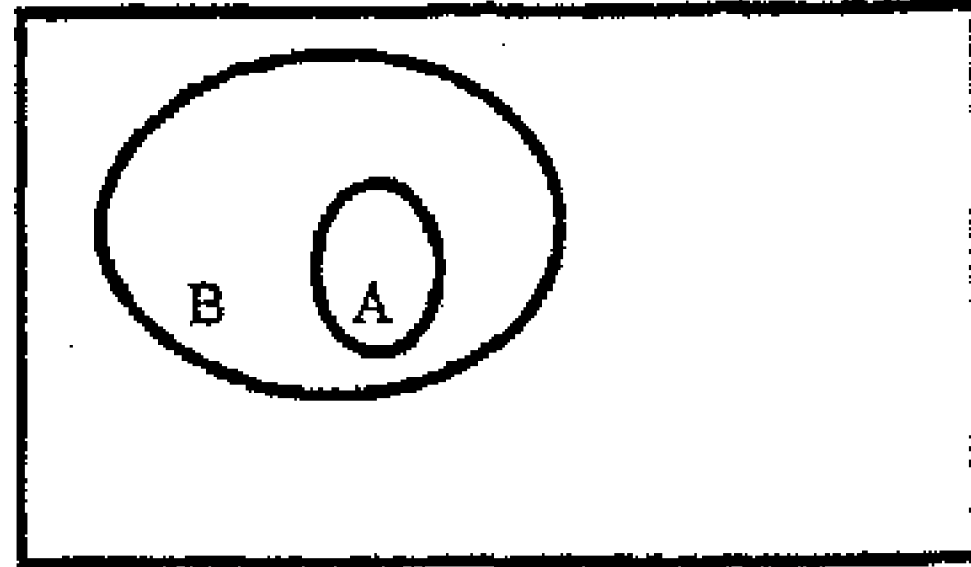


$A - B$

شكل (4-5)

حيث المنطقة غير المظلة تمثل المطلوب وهو  $B-A$ .

أما إذا كان  $A$  هو جزء من حادث آخر  $B$  فإن  $A \subseteq B$  كما هو واضح في شكل (4-6).



شكل (4-6)  $A \subseteq B$

4-4 : تعاريف هامة :

إذا كان الحادث  $A$  فإن احتمال هذا الحادث يمثل  $P(A)$  وأن

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (a)$$

$$P(S) = 1 \quad (b)$$

(c) إذا كان  $A, B$  حدثان منفصلان فإن  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(d) إذا كان  $A_1, A_2, \dots, A_n$  أحداث منفصلة فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

4-5 : النظريات المتعلقة بالاحتمالات :

نظرية (4-1) : إذا كان  $\Phi$  حدث مستحيل فإن  $P(\Phi) = 0$ .

الإثبات نعلم أن  $\Phi \cup \Phi = \Phi, \Phi \cap \Phi = \Phi$

$$\text{وعليه فإن } P(\Phi \cup \Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) = P(\Phi)$$

$$\Rightarrow P(\Phi) + P(\Phi) - P(\Phi) = 0 \Rightarrow P(\Phi) = 0$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-2) : لأي حدث  $A$  فإن  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

الإثبات : نعلم أن الحادث  $A$  ومتممه  $\bar{A}$  حدثان منفصلان أي أن

$$A \cap \bar{A} = \Phi, \quad A \cup \bar{A} = S \quad \text{وأن}$$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad \text{إذن}$$

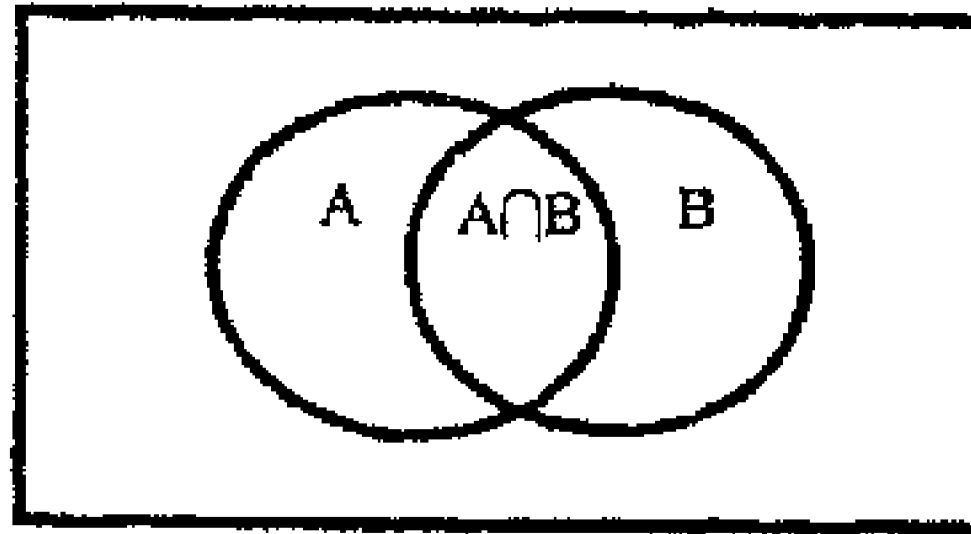
وهو المطلوب.

نظرية (4-3) : ليكن الحدثان  $A, B$  حدثان غير منفصلان أي  $A \cap B \neq \Phi$  فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الإثبات : لإثبات هذه النظرية سوف نستعين بشكل فن (4-7).

S



شكل (4-7)

نكتب من شكل فن العلاقات التالية :

$$A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B), \quad B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$$

ونلاحظ أيضاً أن الحدثان  $A, \bar{A} \cap B$  حدثان منفصلان كذلك  $A \cap B, \bar{A} \cap B$  حدثان منفصلان أيضاً وعليه فإن

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \dots \dots \dots (4-5)$$

$$P(B) = P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \dots \dots \dots (4-6) \text{ كذلك}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \quad \text{وعليه فإن}$$

وإذا عوضنا عن هذه العلاقة في العلاقة (4-5) فإننا نجد أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{وهو المطلوب}$$

ويمكن تعميم نظرية (4-6) على النحو التالي :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots \dots \dots$$

$$(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \dots\dots\dots (4-5)$$

$$P(B) = P[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \dots\dots\dots (4-6) \text{ كذلك}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \text{ وعليه فإن}$$

وإذا عوضنا عن هذه العلاقة في العلاقة (4-5) فإننا نجد أن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ وهو المطلوب}$$

ويمكن تعميم نظرية (4-6) على النحو التالي :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots\dots\dots$$

$$(-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

نظرية (4-4) : إذا كان لدينا الحدثان  $A, B$  فإن احتمال الحدث  $A-B$  هو

$$P(A-B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

الاثبات : نعلم أن  $B, \bar{B}$  حدثان منفصلان ،  $A \cap B, A \cap \bar{B}$  حدثان منفصلان أيضا وعليه فإن

$$A = A \cap S = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}),$$

وكذلك

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A-B)$$

$$\Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-5) : إذا كان  $A, B$  حدثين من الفضاء العيني وكان  $B \subseteq A$  فإن  $P(A-B) = P(A) - P(B)$ .

الاثبات : إذا كان  $B \subseteq A$  فإن  $A \cap B = B$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

وبالتعويض عن  $P(A \cap B)$  في العلاقة

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-6) : إذا كان  $B \subseteq A$  فإن  $P(B) \leq P(A)$

الاثبات : حسب النظرية  $P(A-B) = P(A) - P(B)$  ونعلم أن احتمال أي حدث هو أكبر من أو يساوي الصفر وعليه فإن :

$$P(A) - P(B) \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq P(B) \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

وهو المطلوب.

مثال (4-3) : في تجربة إلقاء قطعتين نقود متمايزتين إذا كان الحدث  $A$  يمثل ظهور صورة واحدة على الأقل والحدث  $B$  يمثل ظهور صورتين فقط بينما الحادث  $C$  يمثل ظهور كتابتين فقط والمطلوب.

(a) هل الحادثين  $A$  ,  $B$  منفصلين ؟

(b) هل الحادثين  $A$  ,  $C$  منفصلين ؟

(c) احتمال ظهور  $A$  أو  $B$  ؟

(d) احتمال ظهور  $B$  أو  $C$  ؟

الحل : إن الفضاء العيني لهذه التجربة  $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$$\text{وإن } P(HH) = P(HT) = P(TH) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

(a) الاحداث  $A = \{HH, HT, TH\}$  ,  $B = \{HH\}$  ,  $C = \{TT\}$  ,  $A, B$  ليسا

منفصلين.  $A \cap B = \{HH\} \neq \Phi$ . لأن تقاطعهما لا يساوي  $\Phi$ .

(b)  $A \cap C = \Phi$  فالحداث  $A$  ,  $C$  منفصلان لأن تقاطعهما  $\Phi$ .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (c)$$

$$B \cap C = \Phi \Rightarrow P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (d)$$

مثال (4-4) : صف به 20 طالبة وثلاثون طالبا خمسة عشر طالبة وعشرون طالبا شعرهم أسود فإذا اختير من هذا الفصل شخصا بطريقة عشوائية فيما احتمال أن يكون الشخص المختار هو طالبة والشعر أسود.

الحل : ليكن الحدث  $\{ \text{أن يكون الشخص المختار طالبة} \} = A$  والحدث  $\{ \text{أن يكون الشخص المختار شعره أسود} \} = B$ .

$$\text{و عليه يكون } P(A \cap B) = \frac{15}{50}, P(B) = \frac{35}{50}, P(A) = \frac{20}{50}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ ويكون الاحتمال المطلوب}$$

$$= \frac{20}{50} + \frac{35}{50} - \frac{15}{50} = \frac{20 + 35 - 15}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

مثال (4-5) : للحدثين  $A, B$  إذا كان  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{2}{5}, P(A) = \frac{1}{3}$  والمطلوب إيجاد.

$$a) P(A \cup B), \quad b) P(\bar{A}), \quad c) P(\bar{A} \cup B) \quad d) P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{الحل : a})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{20 + 24 - 15}{60} = \frac{29}{60}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (b)$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) \quad (c)$$

$$= P(\bar{A}) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= P(\bar{A}) + P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8 + 3}{12} = \frac{11}{12}$$

4-6 : الحدث التام (الأكيد) :

ليكن  $A_1, A_2, \dots, A_n$  أحداث منفصلة يعني  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ، إذا كان الفضاء

العيني  $S$  مكون من اتحاد هذه الأحداث

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

$$= P(S) = 1 \quad \dots \dots \dots (4-7)$$

والعلاقة (4-7) تسمى بالناتج القطعية.

4-7 : الاحتمال الشرطي :

تعريف (4-8) : يقال لاحتمال الحدث  $A$  إذا علم وقوع الحدث  $B$  بالحدث المشروط ويرمز له بالرمز  $P(A/B)$  والآن نتناول العلاقات التالية والنظريات التي تتعلق بهذا المفهوم

....

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \dots\dots\dots (4-8)$$

وبما أن  $A \cap B = B \cap A$  ولإيجاد احتمال وقوع  $B$  إذا علم وقوع  $A$  نجد من العلاقة التالية

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \neq 0 \dots\dots\dots (4-9)$$

ومن العلاقتين (3-8)، (3-9) نستطيع كتابة العلاقة التالية :

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A) \dots\dots\dots (4-10)$$

ويمكن تعميم العلاقة (3-10) للأحداث غير المنفصلة  $A_1, A_2, \dots, A_n$  لتصبح العلاقة على الصورة

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{n-1}) P(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}) \\ &= P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) P(A_{n-1} / A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-2}) \dots \\ &\dots P(A_2 / A_1) P(A_1) \end{aligned}$$

مثال (4-6) : إذا كان  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A) = \frac{1}{3}$  أوجد  $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

نظرية (4-8) : إن احتمال

الإثبات : نعلم من العلاقة (3-8) أن

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$$



وهو المطلوب.

نظرية (4-9) : إذا كان  $P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$  فإن  $A \cap B = \phi$  فإن  $P(B/A)=0, P(A/B)=0$

الاثبات : لأن  $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0 \text{ ولأن}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0 \text{ وكذلك}$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-10) : إذا كان  $A \subseteq B, P(B) \neq 0$  فإن  $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

الاثبات : بما أن  $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

وعليه فإن  $P(A \cap B) = P(A)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \text{ ولأن}$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-11) : إذا كان  $B \subset A, P(B) \neq 0$  فإن  $P(A/B) = 1$

الاثبات : نعلم أن  $P(A \cap B) = P(B)$  عندما تكون  $B \subset A$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \text{ ومن العلاقة}$$

وهو المطلوب.

نظرية (4-12) : إذا كان  $P(A) \neq 0, A \cap B = \phi$  أو  $P(B) \neq 0$

$$P[A / (A \cup B)] = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} \text{ فإن}$$

الاثبات : من تعريف الاحتمال الشرطي فإن

$$P[A / (A \cup B)] = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)}$$

ومن خاصية توزيع التقاطع على الاتحاد وكذلك لأن الحادثين منفصلين فإن

$$P[A / (A \cup B)] = \frac{P[(A \cap A) \cup (A \cap B)]}{P(A) + P(B)}$$

$$= \frac{P(A) + P(A \cap B)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

وبالتعويض عن  $P(A \cap B)$  ويتم المطلوب.

نظرية (4-13) : إذا كان  $B_1 \cap B_2 = \phi$  ,  $P(A) \neq 0$  فإن

$$P[(B_1 \cup B_2) / A] = P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$$

الإثبات : لأن  $B_1 \cap B_2 = \phi$  فإن الحادثين  $B_1 \cap A$  ,  $B_2 \cap A$  أحداث منفصلة وعليه فإن :

$$P[(B_1 \cup B_2) / A] = \frac{P[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{P(A)}$$

$$= \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)}$$

$$= \frac{P[(B_1 \cap A) + (B_2 \cap A)]}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= P(B_1 / A) + P(B_2 / A)$$

وهو المطلوب.

4-8: الأحداث المستقلة :

تعريف (4-9) : الأحداث المستقلة هي الأحداث التي احتمالات وقوعها لا ترتبط مع بعضها البعض.

وهذا الموضوع يأخذ جانباً مهماً في نظرية الاحتمالات فمثلاً في تجربة القاء قطعة نقود مرتين فظهور صورة في المرة الأولى لا يوجب ظهور صورة في المرة الثانية وهذا هو مفهوم الاستقلال.

وهنا وحتى نتعرف على أن الحادثين مستقلين فإنه يشترط أن يكون

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \dots\dots\dots (4-11)$$

وهنا يجب الانتباه وعدم الخلط بين الحادثين المنفصلين والحادثين المستقلين.

مثال (7-4) : في تجربة القاء ثلاثة قطع نقود معا إذا كان الحادث  
 $A = \{\text{ظهور صورة واحدة على الأكثر}\}$ ،  $B = \{\text{ظهور كتابتين فقط}\}$  فهل الحدثان  $A, B$  مستقلان.

الحل : نجد احتمالات الحدثين  $A, B$  فإن  $A = \{TTH, THT, HTT, TTT\}$

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

$$B = \{TTH, THT, TTH\}$$

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{HTT, THT, TTH\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$P(A) \cdot P(B) \stackrel{?}{=} P(A \cap B) \quad \text{و عليه فإن}$$

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{3}{8}$$

$$\frac{12}{64} \neq \frac{3}{8}$$

و عليه فإن الحادثين غير مستقلين.

ونستطيع تعميم العلاقة (11-3) وحتى تكون الأحداث  $A_1, A_2, \dots, A_n$  مستقلة يتطلب

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n) \dots \dots (12-3)$$

وكذلك

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$$

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n)$$

نظرية (14-4) : إذا كان  $A, B$  حدثان مستقلان وكان  $P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$

فإن هذين الحادثين لهما نقاط مشتركة.

الإثبات: بما أن  $A, B$  حادثين مستقلين فإنه يمكن كتابة  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

وبما أن  $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$  وعليه فإن  $P(A \cap B) \neq 0$  أيضا أي أن  $A \cap B \neq \emptyset$  أي أن هناك نقاط مشتركة بينهما وهو المطلوب.

نظرية (4-15) : إذا كان الحادثان  $A, B$  حادثين مستقلين فإن:  
 (a)  $A, \bar{B}$  حادثين مستقلين  
 (b)  $\bar{A}, B$  حادثين مستقلين.  
 (c)  $\bar{A}, \bar{B}$  حادثين مستقلين أيضا.

الإثبات : نعلم أن

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= [1 - P(A)]P(B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \end{aligned}$$

وهو المطلوب أولا.

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= [1 - P(B)]P(A) \\ &= P(\bar{B}) \cdot P(A). \end{aligned}$$

وهو المطلوب ثانيا.

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(\bar{A}) - P(\bar{A}) \cdot P(B) \\ &= P(\bar{A})[1 - P(B)] \\ &= P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}). \end{aligned}$$

الاستقلال التام :

تعريف (4-10) : يقال للأحداث  $A_1, A_2, A_3$  بأنها مستقلة تماما إذا تحققت الشروط التالية :

- 1)  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$
- 2)  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
- 3)  $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$
- 4)  $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$

مثال (4-8) : ألقيت ثلاث قطع نقود معا فإذا كانت الأحداث التالية معرفة على النحو التالي :

$$A = \{HTH, HHH, TTH, TTT\}$$

$$B = \{ HHT, THH, TTH, TTT \}$$

$$C = \{ HTT, HHT, HTH, TTT \}$$

فهل الأحداث الثلاث A, B, C أحداث مستقلة بشكل تام.

$$\text{الحل : } P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P\{ TTT, TTH \} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(A).P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A).P(B) \quad \text{أي أن الشرط الأول قد تحقق}$$

$$P(A \cap C) = P\{ TTT, HTH \} = \frac{1}{4} \neq P(A).P(C)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A).P(C) \quad \text{أي أن الشرط الثاني قد تحقق}$$

$$P(B \cap C) = P\{ TTT, HHT \} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(B).P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B).P(C) \quad \text{أي أن الشرط الثالث قد تحقق}$$

$$A \cap B \cap C = \{ TTT \} \Rightarrow P(\{ TTT \}) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A).P(B).P(C)$$

أي أن الشرط الرابع تحقق ولتحقق الشروط الأربعة السابقة فإن الأحداث الثلاثة السابقة أحداث تامة.

#### 9-4: احتمالات النتائج المتوقعة للفضاء العيني :

إذا كانت كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني مكونة من أحداث مستقلة فإننا نستطيع حساب احتمال كل نتيجة.

مثال (9-4) : كيس به 5 كرات حمراء، 10 بيضاء فإذا كان السحب دون الإرجاع وسحبنا ثلاث كرات اكتب الفضاء العيني لنتائج التجربة كذلك احتمال كل نتيجة.

الحل W : نكتب الفضاء العيني للتجربة وعلى فرض أن الكرة البيضاء رمزنا لها بالرمز W فإن R : وللحمر بالرمز

$$S = \{ WWW, WRW, WWR, WRR, RRR, RWR, RRW, RWW \}$$

كذلك فإن اللون في السحبة الأولى أو الثانية أو الثالثة جميعها مستقلة وعليه يمكن حساب الاحتمالات لكل نتيجة على النحو التالي :

$$P(RWW) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} , \quad P(RRW) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13}$$

$$P(RRW) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} , \quad P(WWR) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13}$$

$$P(RWR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{4}{13} , \quad P(WRW) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13}$$

$$P(RRR) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} , \quad P(WWW) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13}$$

مع ملاحظة أن احتمالات النتائج ليست متساوية لكن

$$P(RWR) = P(RWW) = P(WRW) = \frac{45}{273}, \quad P(WWW) = \frac{72}{273}$$

$$P(WRR) = P(RWR) = P(RRW) = \frac{20}{273}, \quad P(RRR) = \frac{6}{273}$$

4-10 قانون جمع الاحتمالات :

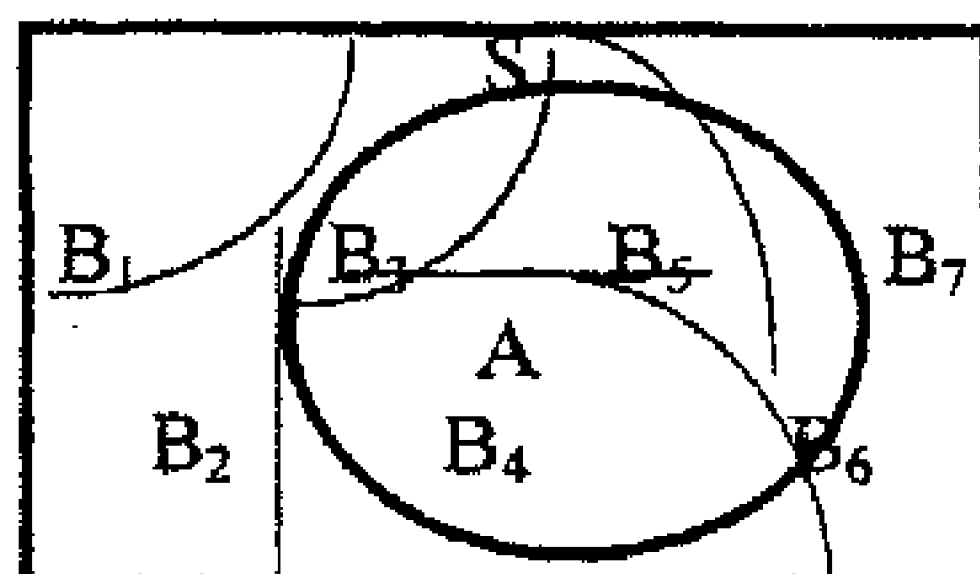
لتكن الأحداث  $B_1, B_2, \dots, B_n$  وتحقق الشروط التالية

$$a) B_i \cap B_j = \phi, \quad i \neq j$$

$$b) \bigcup_{i=1}^n B_i = S$$

$$c) P(B_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

وليكن الحادث  $A \subset S$  مكون من مجموعة من الأحداث  $B_1, B_2, \dots, B_n$  كما هو موضح في شكل (4-8).



$$A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

شكل (4-8)

ومن شكل (4-8) نلاحظ أن

$$A = (A \cap B_1) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

ولأن  $B_1, B_2, \dots, B_n$  أحداث منفصلة فإن تقاطعاتها مع الحدث  $A$  منفصلة أيضا أي

$$A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$$

أحداث منفصلة وبالتالي فإن

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

ومن المساواة (3-10) فإنه يمكن كتابة

$$P(A) = P(B_1).P(A/B_1) + P(B_2).P(A/B_2) + \dots + P(B_n).P(A/B_n) \dots (3-13)$$

ويقال للعلاقة (4-13) بأنها علاقة مجموع الاحتمالات فإذا علم  $P(A/B_i), P(B_i)$  فإنه يمكن حساب الاحتمال  $P(A)$  وتستخدم لذلك العلاقة (4-13).

**مثال (4-10) :** إذا كان لدينا أربعة صناديق الأول والثاني بهما 3 كرات سوداء، 4 كرات بيضاء وكذلك الثاني به 9 كرات سوداء، 5 كرات بيضاء والثالث به كرة سوداء، 6 بيضاء. سحبت من أحد هذه الصناديق كرة واحدة بطريقة عشوائية ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

**الحل :** ليكن { أن يكون في الصندوق الأول 3 سوداء، 4 بيضاء }  $B_1$ ،  
 { 9 كرات سوداء، 5 بيضاء }  $B_2$ ، { كرة سوداء، 6 كرات بيضاء }  $B_3$ ،  
 $A = \{ \text{الكرة المسحوبة سوداء} \}$

$P(B_i)$  : احتمال الكرة المسحوبة ومن أي صندوق.

$P(A/B_i)$  : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء علما بأنها من الصندوق  $B_i$  وعليه فإنه بالإمكان كتابة الاحتمالات التالية :

$$P(B_3) = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{1}{4}, P(B_1) = \frac{2}{4}$$

$$P(A/B_3) = \frac{1}{7}, P(A/B_2) = \frac{9}{14}, P(A/B_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(A) = \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{23}{56}$$

**4-11 صيغة بيز : Bayes Formula**

تحتل قاعدة بيز مكانا هاما في مفهوم الاحتمالات وسنوضح المفهوم من خلال المثال التالي.

**مثال (4-11) :** الكيس  $A$  به 3 كرات سوداء، 5 خضراء، 2 كرة حمراء.

الكيس B به 6 كرات سوداء، 4 خضراء، كرة حمراء وهنا تلقى قطعة نقود فإذا القيت وظهرت صورة فإننا نسحب كرة بطريقة عشوائية من الكيس الأول وإذا ظهرت كتابة سحبنا كرة بطريقة عشوائية من الكيس B. والمطلوب حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علماً بأنها من الكيس A.

الحل :  $P(A) = \frac{1}{2}$  : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس A.

$P(B) = \frac{1}{2}$  : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس B.

$P(2/A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$  : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علماً بأنها سحبنا من الكيس A.

$P(2/B) = \frac{1}{11}$  : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء علماً بأنها سحبنا من الكيس B.

ولإيجاد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء فإن:

$$P(2) = P(A).P(2/A) + P(B).P(2/B)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{8}{55}$$

ويمكن تعميم صيغة بيز على النحو التالي :

النص : إذا كانت الأحداث المنفصلة  $B_1, B_2, \dots, B_n$  مأخوذة من الفضاء العيني S و كان الحدث A هو حدث من الفضاء العيني S فإن :

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (4-14)$$

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A / B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A / B_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \dots (4-15)$$



## تمارين عامة على الاحتمالات

- (1) في تجربة القاء حجرى نرد معا أحدهما أسود والآخر أحمر معا احسب  
(a) احتمال ظهور عدد على الحجر الأسود ضعف العدد على الحجر الأحمر.  
(b) احتمال ظهور مجموع 8 أو 10 على الوجهين الظاهرين من الحجرين.
- (2) كيس به عدد الكرات السوداء ستة أضعاف الكرات الحمراء سحبت من الكيس كرة عشوائية احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- (3) عشرة أشخاص يجلسون في صف ما احتمال أن لا يجلس ثلاثة أشخاص معينين جنباً إلى جنب.
- (4) فصل به 30 طالباً، 15 طالبة يراد تشكيل لجنة مكونة من 5 أشخاص ما احتمال أن تكون اللجنة مكونة من ثلاثة طلاب وطالبتين.
- (5) يتم توزيع عشرة أشخاص في غرفتين الغرفة A تحتوي على ستة أشخاص والغرفة B تحتوي على أربعة أشخاص ما احتمال أن يكون شخصين معينين في الغرفة A.
- (6) يراد إرسال 7 رسائل من خلال ثلاثة مكاتب يريد ما احتمال أن ترسل أربعة منها من خلال المكتب الأول واثنان من خلال المكتب الثاني والثالث من خلال المكتب الثالث.
- (7) إذا كان A , B حدثان منفصلان وكان  $2P(B) = \sqrt{P(A)}$  ,  $A \cup B = S$  احسب احتمال  $A, B$
- (8) إذا كان الفضاء العيني لتجربة معينة مكون من  $r$  من الأحداث منها  $r-3$  حدث متساو في احتمال الظهور والثلاثة أحداث أخرى متساوية في الظهور بين بعضها البعض لكن احتمال ظهور ل حدث منها خمسة أضعاف الحدث من بين  $r-3$  فما احتمال ظهور كل حدث.
- (9) كيس به أربع كرات مرقمة من 1-4 سحبت الكرات الواحدة تلو الأخرى دون الإعادة ما احتمال أن يكون السحب على الترتيب 4، 3، 2، 1.
- (10) كيس به 20 كرة سوداء، 4 كرات حمراء خلطت معا بشكل جيد وسحبت الكرات الواحدة تلو الأخرى مع عدم الإرجاع ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في السحبة السابعة حمراء.
- (11) طلي وجهان لحجر نرد باللون الأحمر وثلاثة وجوه باللون الأخضر ووجه واحد باللون الأصفر القى هذا الحجر ثلاث مرات.  
(a) ما احتمال ظهور اللون الأحمر في المرة الأولى والثانية بينما الأخضر في الثالثة.  
(b) ما احتمال ظهور اللون الأحمر في مرتين والأخضر في مرة واحدة.
- (12) إذا كان احتمال نجاح ثلاثة طلاب A , B , C في فصل ما على التوالي هو 0.95 ، 0.75 ، 0.8 ما احتمال نجاح الثلاثة طلاب معا.
- (13) إذا كان احتمال حادث ما في تجربة ما هو أ فإذا أجريت التجربة عشرة مرات مستقلة ما احتمال أن يظهر الحادث في مرتين على الأقل.

- (14) إذا كانت الاحتمالات المعطاة لتجربة ما لحادثين  $A, B$  هي  
 $P(A) = \frac{1}{3}, P(B/A) = \frac{1}{2}, P(A/B) = \frac{1}{3}$  أثبت أن  $P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{2}{3}$ .
- (15) يجرب شخص  $n$  من المفاتيح لفتح باب، إذا علم أن ثلاثة مفاتيح تفتح الباب ما احتمال أن يفتح الباب في المحاولة الخامسة.
- (16) لدينا ثلاثة أحداث  $A_1, A_2, A_3$  وكان  $A_i \cap A_j \neq \Phi, i \neq j$  أثبت أن  

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
- (17) إذا كانت الأحداث  $A, B, C$  ثلاث أحداث مستقلة أثبت أن الحادثين  $A-C, B$  أحداث مستقلة أيضا.
- (18) ألقي حجرًا فرد معًا فإذا علم أن الحجر الأول هو عدد زوجي احسب احتمال ظهور الرقم 5 على الحجر الثاني.
- (19) إذا كان  $A_i \cap A_j \neq \Phi, i \neq j$  فاثبت أن  

$$P[(A_1 \cup A_2)/A_3] = P(A_1/A_3) + P(A_2/A_3) - P[(A_1 \cap A_2)/A_3]$$
- (20) إذا كان  $P(A) \neq 0, B_i \cap B_j = \phi, i \neq j$  أثبت أن  

$$P[(B_1 \cup B_2 \cup \dots)/A] = P(B_1/A) + P(B_2/A) + \dots$$
- (21) إذا كان  $A, B$  حادثان غير منفصلان وكان  $P(B) \neq 0$  فاثبت أن  

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$
- (22) إذا كان  $P(A/B) > P(A)$  أثبت أن  $P(B/A) > P(B)$ .
- (23) إذا كان لدينا  $A, B, C$  ثلاثة أحداث فاثبت أن  

$$P[C/(A \cap B)]P(A/B) = P[(A \cap C)/B]$$
- (24) إذا كان لدينا ثلاثة أحداث مستقلة  $A, B, C$  فاثبت أن  

$$P[A/(B \cup C)] = P(A)$$
- (25) كيس به عشرة كرات مرقمة من 1-10 وإن احتمال سحب الكرات من الصندوق هو  
 $P(i) = K_i, i = 1, 2, \dots, 10$   
 والمطلوب :  
 (a) احتمال سحب كل كرة.  
 (b) احتمال سحب الكرة ذات الترتيب الثالث إذا علم أن الكرة المسحوبة إما الثالثة أو السابعة.

(c) وإذا سحب من الكيس ثلاثة كرات على التوالي فما احتمال عدم الظهور لأن يكون في السحبة الأولى الرقم 5 والسحبة الثانية رقم 7 والسحبة الثالثة الرقم 8.

(26) ثلاثة صناديق A, B, C يحتوي الصندوق A على 16 مصباح صالح، 4 صناديق غير صالحة بينما الصندوق B يحتوي على 15 مصباح صالح، 5 مصابيح غير صالحة والصندوق C يحتوي على 18 مصباح صالح، 12 غير صالحة، يلقي حجر نرد في الهواء فإذا ظهر الرقم 1، 2، 3، 4، 5، 6 سحب من الصندوق A مصباحين مع عدم الإعادة وإذا ظهر الرقم 4، 5، 6 سحب من الصندوق B وإذا ظهر الرقم 6 سحب من الصندوق C والمطلوب.

(a) حساب احتمال أن يكون المصباحين سليمين.



# الفصل الخامس

## المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد



## الفصل الخامس

# المتغيرات العشوائية

## ذات البعد الواحد

### 5-1 مقدمة

سوف نستعرض في هذا الفصل تعريف المتغيرات العشوائية ونوالها الاحتمالية ولقد عرفنا في فصل سابق بأن الفضاء العيني للتجربة ما هو إلا مجموعة النتائج المتوقعة من إجراء تجربة ما وأن الحادث ما هو إلا مجموعة جزئية من الفضاء العيني. وفي بعض التجارب كانت عناصر مجموعة الفضاء العيني ما هي إلا أعدادا كما هو الحال  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ . بينما البعض الآخر عبارة عن رموز ليست عددية كما هو الحال  $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

وفي هذه الحالة نريد التعبير عن هذه النتائج بشكل عددي نضطر بتعريف المتغير العشوائي الذي سيعبر عن حالة عددية

### 5-2 تعريف المتغير العشوائي

**تعريف (5-1) :** الدالة التي تربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني مع عدد حقيقي يسمى بالمتغير العشوائي.

وسوف نعبر عن المتغيرات العشوائية بالأحرف الكبيرة  $X, Y, \dots$  وعن القيم العددية التي يأخذها كل متغير بالأحرف الصغيرة  $x, y, \dots$  فإذا كان الفضاء العيني منتهيا أو غير منتهي سوف نعبر عن كل متغير وما سيأخذه من قيم كواحد من الحالات التالية :

$$(X=x) = \{S: X(S)=x\}$$

أو

$$(X \leq x) = \{S: X(S) \leq x\}$$

أو

$$(X > x) = \{S: X(S) > x\}$$

.....(5-1)

أو

$$(a \leq X \leq b) = \{S : a \leq X(S) \leq b\}$$

واحتمالات كل قيمة من قيم المتغير العشوائي يمكن التعبير عنها على النحو التالي.

$$P(X=x) = P[X(S)=x] \quad \dots(5-2)$$

أو

$$P(X \leq x) = P[X(S) \leq x]$$

أو

$$(X > x) = P[X(S) > x]$$

أو

$$P(a \leq X \leq b) = P[a \leq X(S) \leq b]$$

واحتمال جميع قيم لمتغير العشوائي تكون مساوية للواحد الصحيح.

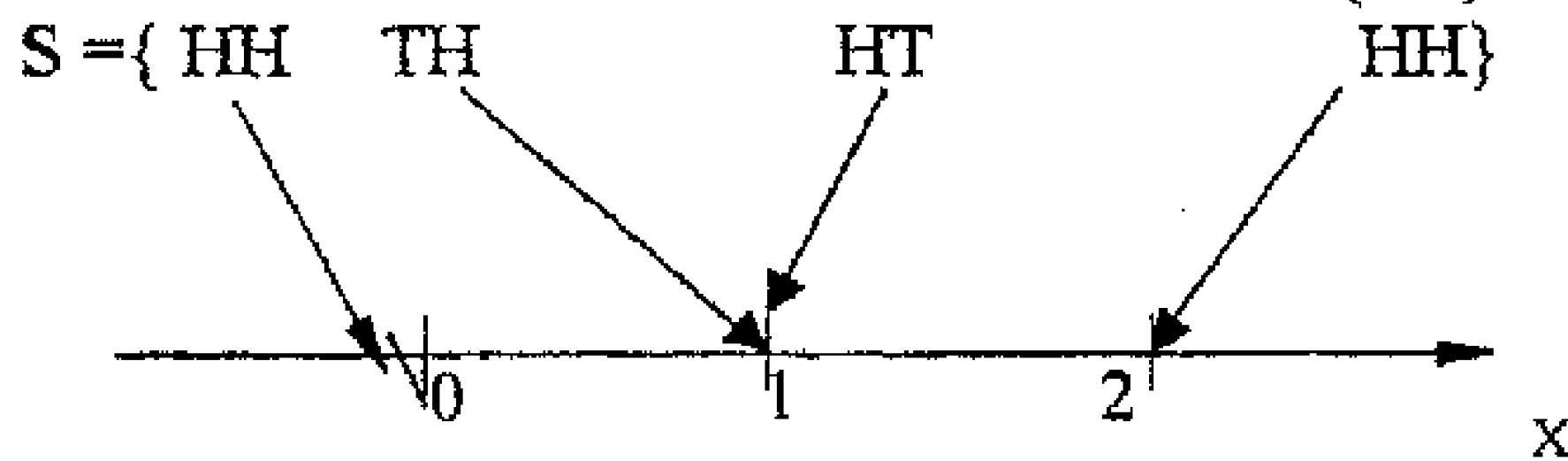
مثال (5-1) : في تجربة لقاء قطعتي نقود متمايزتين وكان المتغير العشوائي  $X$  يمثل عدد الصور الظاهرة على الوجه العلوي. اكتب القيم التي يأخذها المتغير ثم أوجد احتمال كل متغير.

الحل : نكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.  $S = \{HH, HT, TH, TT\}$  وعليه فإن القيم التي يأخذ المتغير العشوائي هي كما في جدول (5-1).

$X$	0	1	2
$P(x)$	1/4	2/4	1/4

جدول (5-1)

وحول كيفية اقتران كل عنصر من الفضاء العيني مع عدد حقيقي ليمثل المتغير العشوائي  $X$  يوضح بالشكل (5-1).



شكل (5-1)



### 3-5 : القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X :

إذا كانت قيم المتغير العشوائي X هي  $x_1, x_2, \dots$  وكانت احتمالات كل قيمة على التوالي  $P(X=x_1), P(X=x_2), \dots$  فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي والتي سنرمز لها بالرمز  $E(X)$  يمكن إيجادها على النحو

$$E(X) = x_1 P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + \dots + x_n P(X=x_n)$$

وبصيغة المجموع تصبح القيمة المتوقعة على النحو التالي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \quad \dots\dots\dots (5-3)$$

وتسمى القيمة المتوقعة  $E(X)$  بالمتوسط المركزي وباختصار يرمز لها بالرمز  $\mu$

### 4-5 خصائص التوقع الرياضي.

(1) إن القيمة المتوقعة للعدد الثابت c هي نفسها c أي  $E(c) = c$

مثال (5-2) : أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور صورة في تجربة القاء قطعة نقود ثلاث مرات.

الحل : نكتب الفضاء العيني للتجربة.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

ثم نكتب جدول التوزيع الاحتمالي (5-2) للمتغير العشوائي X.

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

### جدول (5-2)

ثم نجد القيمة المتوقعة.

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

مثال (5-3) : إذا كانت القيم التي يأخذها متغير عشوائي X معطاة على النحو  $2m, 2m, \dots, m(m-1), m^2$  وعلى اعتبار أن k عدد ثابت وكانت دالة الاحتمال لهذا المتغير

هي  $P(X = x) = \frac{2x}{K}$  أوجد قيمة الثابت K.

الحل : بما أن التوزيع احتمالي فإن مجموع الاحتمالات لجميع القيم يساوي واحد وعليه نكتب احتمال كل متغير على النحو.

$$P(X = m) = \frac{2m}{K}$$

$$P(X = 2m) = \frac{4m}{K}$$

⋮

$$P(X = m^2) = \frac{2m^2}{K}$$

وهذه الاحتمالات مجموعها يساوي واحد أي.

$$\frac{2m}{K} + \frac{4m}{K} + 2 + \dots + \frac{2m^2}{K} = 1$$

وإذا أخذنا عامل مشترك  $\frac{2m}{K}$  يبقى.

$$\frac{2m}{K} (1 + 2 + 3 + \dots + m) = 1$$

ومن علاقة مجموع  $m$  من الأعداد نجد أن

$$\frac{2m}{K} \cdot \frac{m(m+1)}{2} = 1 \Rightarrow K = m^2(m+1)$$

وهو المطلوب.

مثال (4-5) : في تجربة القاء قطعة نقود لحين ظهور صورة أو ظهور 4 كتابات فإذا القيت ثلاث مرات فأكثر فإن اللاعب يكسب 200 قرش وعكس ذلك يخسر 150 قرش احسب القيمة المتوقعة لهذا اللاعب.

الحل : نكون الفضاء العيني لهذه التجربة على النحو.

$$S = \{ TTTT, TTTH, TTH, HTH \}$$

نكون جدول التوزيع الاحتمالي جدول (3-5)

X	200	-150
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$p(X=200) = p\{TTTT, TTTH, TTH\} \\ = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(-150) = \frac{3}{4}$$

وعليه فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي  $X$  هو .

$$E(X) = 200\left(\frac{1}{4}\right) + (-150)\left(\frac{3}{4}\right) = 50 - 112.5 = -62.5 \text{ قروش}$$

#### 5-4 : توقع دالة المتغير العشوائي :

نسمى الدوال المرتبطة بالمتغير العشوائي  $X$  دوال المتغير العشوائي وكون المتغير العشوائي  $X$  فإن الدوال  $ax, x+b, bx^2, (x-a)^2$  جميعها دوال للمتغير العشوائي  $X$  وفي هذه الحالة  $a, b$  ثابتان وسنعتبر عن هذه الدوال بالرموز

$Y = g(x), Z = h(x)$  وهكذا وإذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  فإن الدالة المرتبطة بهذا المتغير العشوائي  $Y$  تأخذ القيمة  $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2), \dots, y_n = g(x_n)$  وبالتالي فإن احتمال قيم دالة المتغير العشوائي هي نفسها احتمالات القيم التي يأخذها المتغير العشوائي أي

$$P(Y = y_i = g(x_i)) = P(X = x_i)$$

وعليه فإن القيمة المتوقعة لدالة المتغير العشوائي.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E[g(x)] = y_1 \cdot P(Y = y_1) + y_2 \cdot P(Y = y_2) + \dots + y_n \cdot P(X = x_n) \\ &= g(x_1) \cdot P(X = x_1) + g(x_2) \cdot P(X = x_2) + \dots + g(x_n) \cdot P(X = x_n) \end{aligned}$$

أو بصيغة المجموع.

$$E[g(x)] = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot P(X = x_i) \dots \dots \dots (5-4)$$

مثال (5-5) : إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي  $X$  المبين في جدول (5-4)

$X$	0	1	2
$P(x)$	0.2	0.3	0.5

جدول (5-4)

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للدوال التالية

$$Z = x^3 \quad (3) \quad W = 2x^2 \quad (2) \quad Y = 3x \quad (1)$$

الحل : كما ذكرنا سابقاً أن الاحتمالات للدوال هي نفسها للمتغير العشوائي. وعليه

$$1) E(Y) = 3(0(0.2) + 1.(0.3) + 2(0.5)) = 3(0.3 + 1.0)$$

$$= 3(1.3) = 3.9$$

$$2) E(W) = 2(0^2(0.2) + 1^2(0.3) + 2^2(0.5)) = 2(0 + 0.3 + 2.) \\ = 2(2.3) = 4.6$$

$$3) E(Z) = 0^3(0.2) + 1^3(0.3) + 2^3(0.5) = 0 + 0.3 + 4. = 4.3$$

نظرية (5-1) : ليكن  $X$  متغيراً عشوائياً وليكن  $a, b$  ثابتان فإن

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

البرهان : بالعودة للعلاقة (5-4) فإن :

$$E(ax+b) = (ax_1+b)P(X=x_1) + (ax_2+b)P(X=x_2) + \dots + (ax_n+b)P(X=x_n)$$

نتناول الطرف الأيمن ونعمل على فك الأقواس.

$$= ax_1P(X=x_1) + b.P(X=x_1) + ax_2P(X=x_2) + b.P(X=x_2) + \\ \dots + aX_nP(X=x_n) + b.P(X=x_n)$$

ثم نعمل على ترتيب الحدود وأخذ العامل المشترك مرة أخرى لنحصل على

$$= a [x_1P(X=x_1) + x_2P(X=x_2) + \dots + x_nP(X=x_n)] \\ + b [P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n)]$$

$$E(aX + b) = a E(X) + b \quad \dots\dots\dots (5-5)$$

لأن :

$$P(X=x_1) + P(X=x_2) + \dots + P(X=x_n) = 1$$

$$E(X) = x_1P(X=x_1) + x_2P(X=x_2) + \dots + x_nP(X=x_n)$$

ويتم المطلوب.

نظرية (5-2) : لتكن  $\mu = E(X)$  هي الوسط الحسابي للمتغير العشوائي  $X$  فإن  $E(X-\mu) = 0$

البرهان : حسب النظرية (4-1) وبالتعويض عن  $a = 1, b = \mu$  يصبح

$$E(X-\mu) = E(X) - \mu \Rightarrow \mu - \mu = 0 \quad \text{لأن } E(X) = \mu \quad \text{ويتم المطلوب.}$$

5-5 : تباین المتغير العشوائي :

إن التباين والانحراف المعياري هما مقياسان أساسيان لقياس مقدار التغير بين قيم المشاهدات

ووسطها الحسابي وسنرمز للتباين بالرمز  $V(X)$  أو  $\sigma_x^2$ . وعليه سنعرف التباين بالعلاقة التالية :

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] \quad \dots\dots\dots (5-6)$$

أما الانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز  $\sigma_x$  سيكون هو الجذر التربيعي الموجب للتباين وعليه فإن

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

نظرية (5-3): إن تباين المتغير العشوائي  $X$  والذي قيمته المتوقعة  $\mu = E(X)$  هو

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

البرهان : نبدأ بالعلاقة (4-6)

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2 - 2X\mu + \mu^2] \end{aligned}$$

وعلى اعتبار أن  $\mu$  عدد ثابت  $E(\mu^2) = \mu^2$  و  $E(X) = \mu$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 \quad \dots\dots\dots (5-7)$$

وهو المطلوب.

مثال (5-6): إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$  معطى بالجدول (5-4).

X	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.1	0.5	0.3

جدول (5-5)

المطلوب إيجاد التباين والانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي.

الحل : نجد أولاً توقع المتغير العشوائي  $X$  أي

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(0.1) + 2(0.1) + 3(0.5) + 4(0.3) \\ &= 0.1 + 0.2 + 1.5 + 1.2 = 3 \end{aligned}$$

نجد  $E(X^2)$  على النحو

$$E(X^2) = 1^2(0.1) + 2^2(0.1) + 3^2(0.5) + 4^2(0.3) \\ = 0.1 + 0.4 + 4.5 + 4.8 = 9.8$$

نجد التباين من العلاقة

$$\sigma_x^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \\ = 9.8 - (3)^2 = 9.8 - 9 = 0.8$$

ولإيجاد الانحراف المعياري نجده من العلاقة التي تربطه بالتباين.

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.8} = 0.9$$

نظرية (5-4) : إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً ثنائياً  $V(X)$  وكان  $c$  عدد ثابت فإن

$$V(X + c) = V(X) \quad (a)$$

$$V(cX) = c^2 \cdot V(X) \quad (b)$$

البرهان :

(a) من العلاقة (5-6) نضع بدلاً من  $X$  القيمة  $X + c$  لتصبح

$$V(X + c) = E\{[(X + c) - E(X + c)]^2\} \\ = E\{[(X + c) - E(X) - c]^2\} \\ = E\{(X - \mu)^2\}$$

$$V(X + c) = V(X)$$

..... (5-8)

(b) من العلاقة (5-6) نجد أن

$$V(cX) = E\{[cX - E(cX)]^2\} \\ = E\{[cX - cE(X)]^2\}$$

يأخذ العامل المشترك

$$= E\{[c(X - E(X))]^2\}$$

$$= E\{[c^2(X - \mu)^2]\}$$

$$V(cX) = c^2 \cdot V(x)$$

..... (5-9)

وهو المطلوب.

نتيجة : إذا كان  $a, b$  ثابتين فإن

$$1) V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$2) \sigma_{c \cdot x} = \sigma_x$$

$$3) \sigma_{cx} = |c| \sigma_x$$

نظرية (5-5) : إذا كان الوسط الحسابي لمتغير عشوائي  $\mu$  وتباينه  $\sigma^2$  فإن المتوسط

الحسابي للمتغير العشوائي  $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$  هو

$$1) E(X^*) = 0$$

$$2) V(X^*) = 1$$

البرهان : من العلاقات (5-5) ، (5-8) ، (5-9) ينتج أن

$$E(X^*) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

وهذا هو اثبات المطلوب الأول.

$$V(X^*) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

وهذا هو المطلوب الثاني.

ويقال للمتغير العشوائي  $X^*$  بالمتغير العشوائي القياسي.

## 5-6 : المتغيرات العشوائية المنفصلة :

### 5-6-1 : تعريف المتغير العشوائي المنفصل

ليكن  $X$  متغير عشوائي حقيقي وأن عدد القيم التي يأخذها المتغير  $X$  منتهية أو قابلة للعد في اللانهاية فإنه يقال للمتغير العشوائي  $X$  بأنه متغير منفصل مثلاً ذلك مجموع الأوجه الظاهرة في تجربةلقاء حجر ي نرد، عدد الأبناء الذكور في عائلة لديها 4 أطفال، عدد الصور، الظاهرة في تجربةلقاء قطعة نقود ثلاث مرات كلها تمثل متغيرات عشوائية منفصلة.

### 5-6-2 : تعريف الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل :

ليكن  $X$  متغير عشوائي منفصل فإن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي وهي  $X_i$  يوجد احتمال هو  $P(X_i)$  ،  $i = 1, 2, \dots$  ، ويحقق الشروط التالية :

$$a) P(x) = 0, x \notin R_x$$

$$b) 0 \leq P(x_i) \leq 1, V_{xi} \in R_x$$

$$c) \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

مثال (5-7) : كيس به كرة حمراء وثلاث كرات سوداء سحبت من هذا الكيس كرة بشرط أن يكون السحب دون الإعادة وتنتهي عملية السحب حتى ظهور الكرة الحمراء فإذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد مرات تكرار عملية السحب أوجد الدالة الاحتمالية لهذا المتغير.

الحل : نكتب أولاً الفضاء العيني للتجربة.

$$S = \{ \dots, BBBR, BBR, BR, R \}$$

وهنا إذا كان عدد مرات ظهور الكرة السوداء هو  $x-1$  فإن  $x$  ظهور كرة حمراء وعليه فإن.

$$P(X) = P(X = x) = \begin{cases} = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{4}, x = 1, 2, 3 \\ = 0 \end{cases} \dots (5-10)$$

لقيم  $x$  الأخرى.

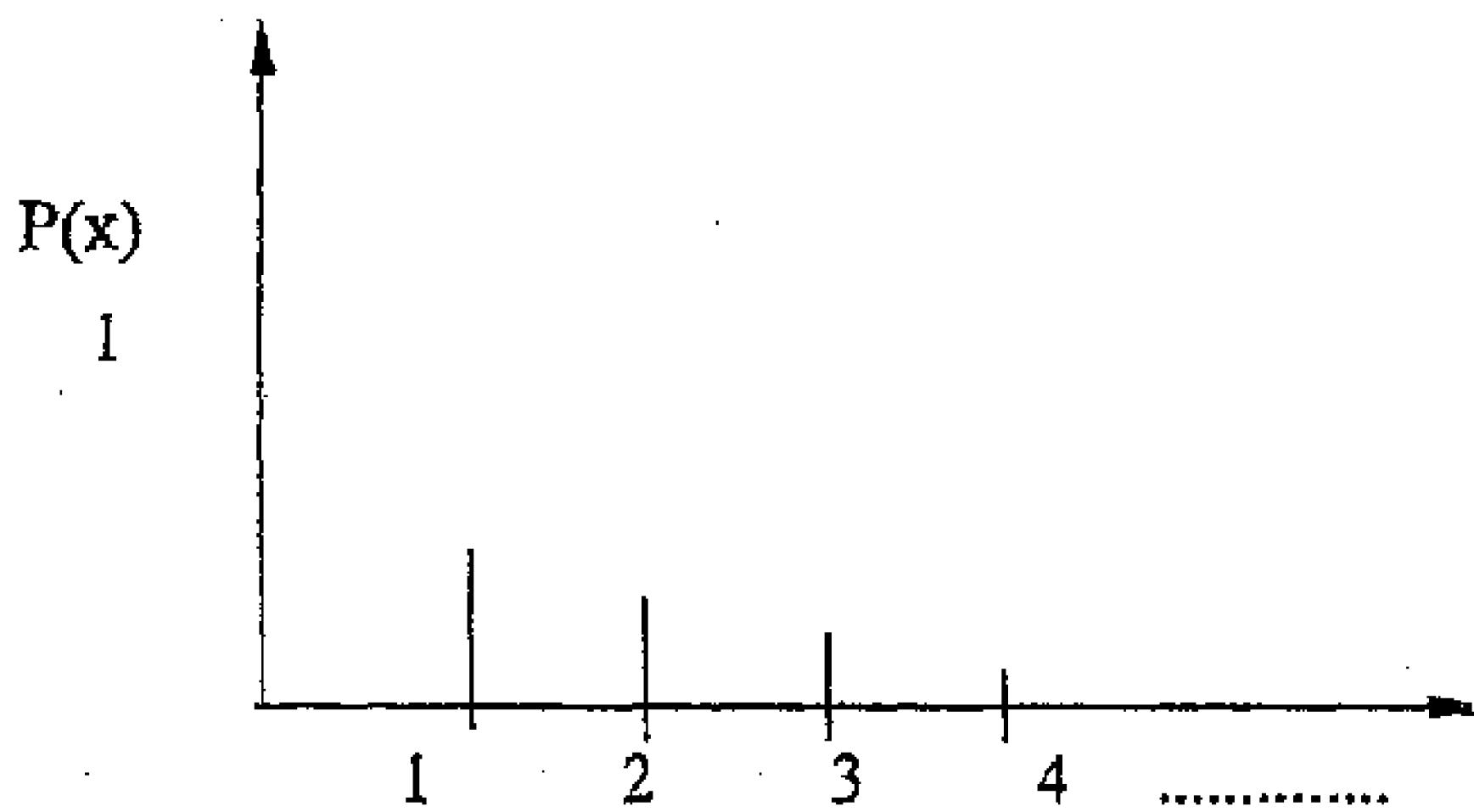
والدالة أعلاه هي الدالة الاحتمالية وتحقق الشروط التالية :

$$a) \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{4} \geq 0, x = 1, 2, \dots$$

$$b) \sum_{x=1}^{\infty} P(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$$

والشكل (5-2) يمثل العلاقة (5-10)





شكل (5-2)

مثال (5-8) : إذا أعطينا الدالة التالية :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{x-1} & , x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

فهل الدالة  $P(x)$  دالة احتمالية.

الحل : حتى نتحقق من كون  $P(x)$  دالة احتمالية يتطلب التحقق من الشروط السابقة للدالة الاحتمالية

$$1) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{x-1} \geq 0, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$2) \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^{x-1} = \frac{3}{4} \neq 1$$

وعليه ولعدم تحقق أحد الشروط فإن  $P(x)$  ليست دالة احتمالية.

مثال (5-9) : الدالة الاحتمالية لمبيعات بائع جرائد يومية التي تأخذ متغيراً عشوائياً معطاة كما يلي :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2500}x, & x = 1, 2, \dots, 50 \\ \frac{1}{2500}(100 - x), & x = 51, \dots, 100 \\ 0, & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

احسب الاحتمالات التالية .

- (a) احتمال أن يبيع أكثر من 50 جريدة.  
(b) احتمال أن يبيع أقل من 50 جريدة.  
(c) احتمال أن يبيع بين 25-75 بما فيها الحدود جريدة.  
(d) احتمال أن يبيع فقط 50 جريدة.

الحل : الاحتمالات المطلوبة

احتمال أن يبيع أكثر من خمسين جريدة

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x > 50) &= \sum_{x=51}^{100} \frac{1}{2500}(100 - x) \\ &= \frac{1}{2500}(49 + 48 + \dots + 1 + 0) = \frac{1}{2500} \times \frac{49 \times 50}{2} \\ &= \frac{49}{100} \end{aligned}$$

احتمال أن يبيع أقل من خمسين جريدة :

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X < 50) &= \sum_{x=1}^{49} \frac{1}{2500}X = \frac{1}{2500} \sum_{x=1}^{49} X = \frac{1}{2500}(1 + 2 + \dots + 49) \\ &= \frac{1}{2500} \times \frac{49 \times 50}{2} = \frac{49}{100} \end{aligned}$$

احتمال أن يبيع عدد يتراوح بين 25 ، 75 جريدة :

$$\text{c) } P(25 < X < 75) = \sum_{x=25}^{50} \frac{1}{2500}X + \sum_{x=51}^{75} \frac{1}{2500}(100 - x) = \frac{76}{100}$$

$$\text{d) } P(x = 50) = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}$$

يلاحظ أن  $P(X > 50) + P(X = 50) + P(X < 50) = 1$

## 5-7 : المتغيرات العشوائية المتصلة

### 5-7-1 : تعريف المتغير العشوائي المتصل.

ليكن  $X$  متغير عشوائي حقيقي فإذا كانت منطقة تعريف المتغير هي فترة أو مجموعة فترات فإنه يقال لهذا المتغير العشوائي بأنه متغير متصل. مثال على ذلك أطوال الطلاب أو عمر ماكينه. وتكون منطقة تعريف المتغير العشوائي المتصل على النحو التالي.

$$R_x = \{a \leq X \leq b\} \text{ مجموعة فترة واحدة}$$

$$R_x = \{c < X < d, e < x < f\} \text{ مجموعة فترتين}$$

ويمكن أن يكون الحد الأدنى لمنطقة التعريف  $-\infty$  والحد الأعلى  $+\infty$

### 5-7-2 : الدالة الاحتمالية للمتغير المتصل (دالة الكثافة الاحتمالية)

لنأخذ المتغير العشوائي المتصل  $X$  فإذا حققت الدالة الشرط التالية فنقول بأن الدالة هي دالة الكثافة الاحتمالية وأما الشروط فهي.

$$a) f(x) = 0, X \notin R_x.$$

$$b) f(x) \geq 0, \forall x \in R_x.$$

$$c) \int_{R_x} f(x) dx = 1$$

مثال (5-10) : إذا كان لدينا الدالة  $f(x)$  والمعرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

هل  $f(x)$  دالة كثافة احتمالية ؟

الحل : بالعودة لشروط دالة الكثافة الاحتمالية فإن

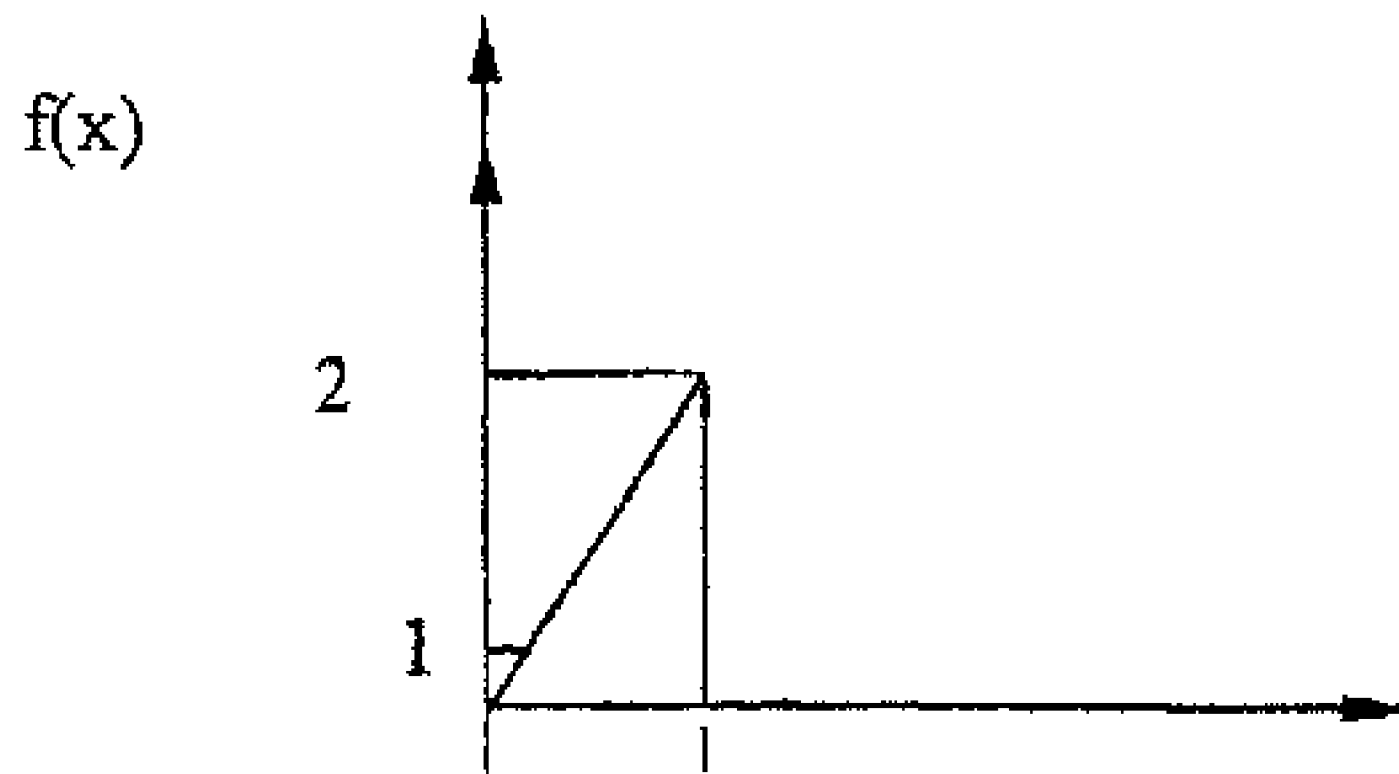
(a) لكل قيمة  $x$  في منطقة التعريف فإن  $f(x) \geq 0$

(b) لو أخذنا تكامل الدالة في الفترة المحددة فإن

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

ولتحقيق الشروط السابقة فإن  $f(x)$  هو دالة كثافة احتمالية وهو المطلوب أما بيان هذه الدالة

$f(x)=2x$  فهو كما يظهر في الشكل (5-3)



شكل (5-3)

وإذا كان  $f(x)$  دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المتصل فإن الاحتمالات  $P(X \leq a)$ ,  $P(a < x < b)$ , ..... تظهر على النحو التالي :

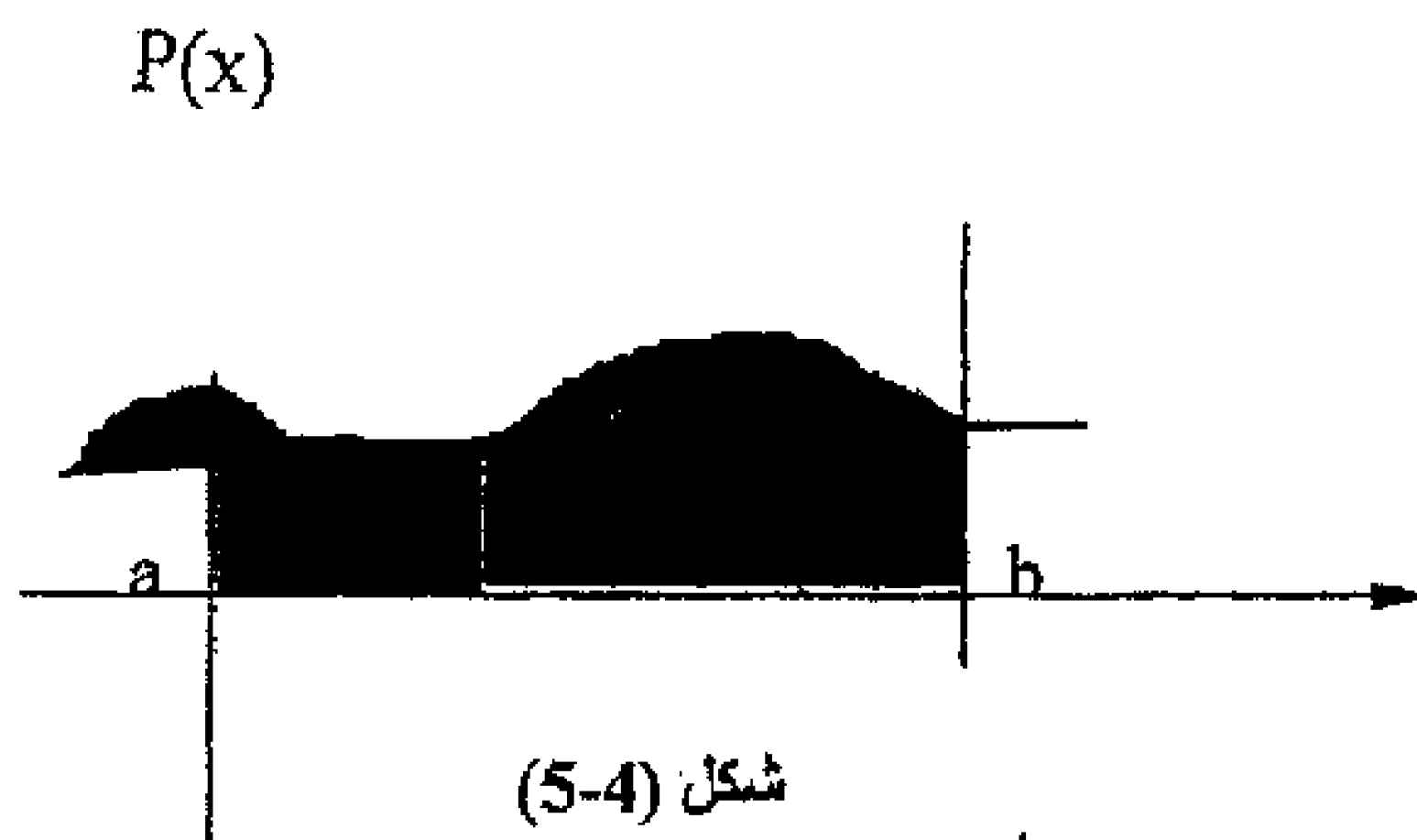
$$P(x \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx,$$

$$P(x > a) = \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

وهنا وبشكل عام فإن منطقة التعريف  $R_x = \{-\infty < x < \infty\}$  أما في الحالات الخاصة

يستبدل  $-\infty, \infty$  بالحدود العليا والدنيا المعطاه.  
 ن بيان دالة الكثافة الاحتمالية للدالة  $f(x)$  تتمثل بالمنطقة المظللة في شكل (5-4).



شكل (5-4)

ومن تعريف التكامل نجد أن.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx = 1$$

أو .....(5-11)

$$P(X \geq a) + P(X < a) = P(X > a) + P(X \leq a) = 1$$

مثال (5-11): إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$  معطاة بالعلاقة التالية.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد  $P(x \geq 0.5), P(< 0.5), P(0.3 \leq x \leq 0.5)$

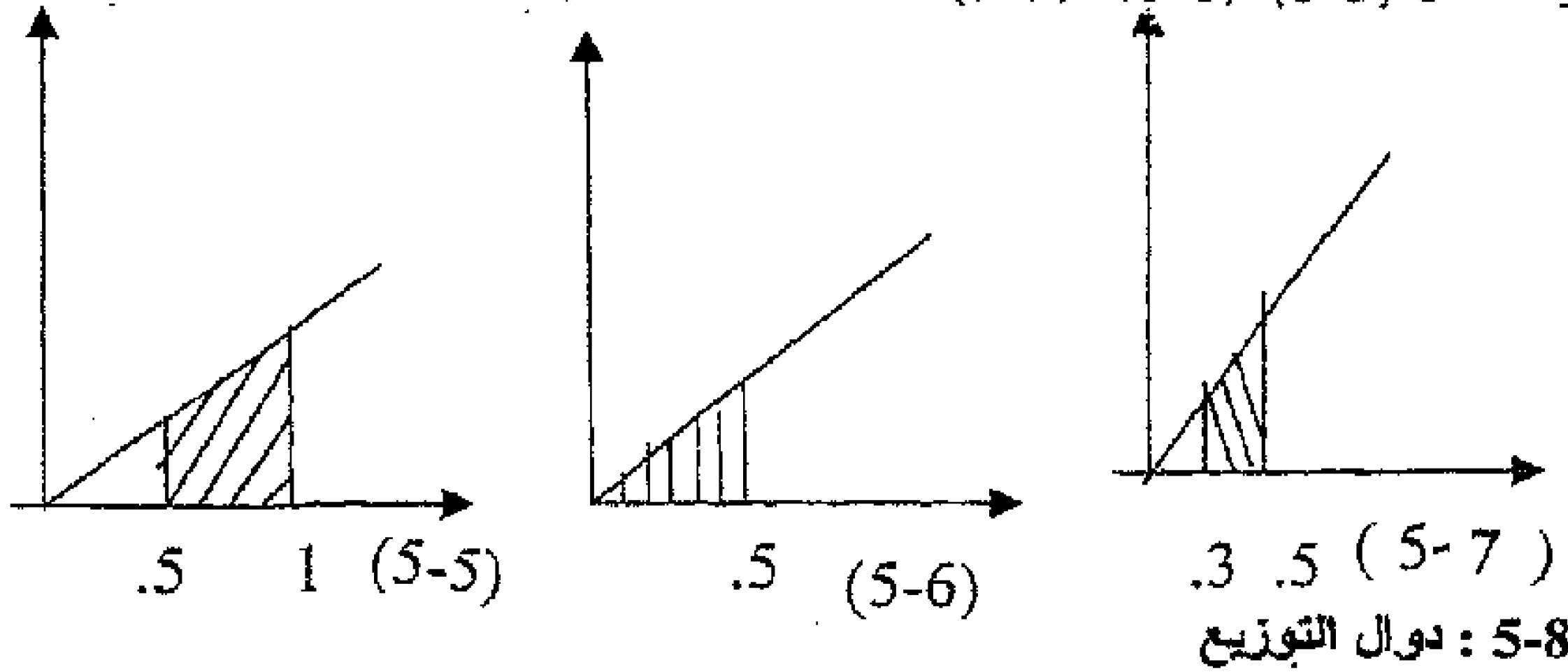
الحل :

$$1) P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^1 2x dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_{0.5}^1 = x^2 \Big|_{0.5}^1 = 1^2 - (0.5)^2 = 0.75$$

$$2) P(x < 0.5) = \int_0^{0.5} 2x dx = x^2 \Big|_0^{0.5} = 0.25$$

$$3) P(0.3 < x < 0.5) = \int_{0.3}^{0.5} 2x dx = x^2 \Big|_{0.3}^{0.5} = (0.25 - 0.09) = 0.16$$

والأشكال (5-5)، (5-6)، (5-7) تمثل المناطق المطلوبة.



#### 5-8-1 : تعريف دالة التوزيع :

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  وكان  $x$  عدد حقيقي وكان الحدث  $(X \leq x) = \{S: X(S) \leq x\}$  فإن احتمال الحدث  $P(X \leq x)$  مرتبط بقيمة  $X$  وبصيغة أخرى هو دالة المتغير  $X$  وتسمى هذه الدالة باسم دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  (دالة التوزيع التجميعي). ويرمز له بالرمز  $F_x(x)$  أو  $F(x)$  وعليه فإن  $F(x) = P(X \leq x)$  ولكل قيمة  $x$  فإن  $0 \leq F(x) \leq 1$  أما إذا كان المتغير العشوائي  $X$  منفصلاً فإن دالة التوزيع تصبح على النحو

$$F(x) = \sum_{n \leq x} P(n) \quad \dots\dots\dots (5-12)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي  $X$  متصلاً فإن دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي تكتب بالصورة التالية

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \dots\dots\dots (5-13)$$

## 2-8-5 : خواص دالة التوزيع :

تتمتع دالة التوزيع بالخواص التالية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (a)$$

وهنا أخذ  $R_x = \{-\infty < x < +\infty\}$

(b) الدالة  $F(x)$  دالة متزايدة بالنسبة للمتغير  $x$  يعني.

لكل  $x_1 < x_2$  فإن  $F(x_1) \leq F(x_2)$

الاثبات : إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن الحدث  $(x_1 \leq x_2)$  هو حدث محتوي بالحدث  $(x_1 < x_2)$  وعليه فإن:

$$P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2)$$

(c) إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن:

$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

الاثبات : لكون  $x_1 < x_2$  يمكننا كتابة ما يلي:

$$(x \leq x_2) = (x \leq x_1) \cup (x_1 < x \leq x_2)$$

ولكون الطرف الأيمن عبارة عن حدثين منفصلين فإنه يمكن كتابة أعلاه بالصورة التالية:

$$P(x_1 < x \leq x_2) = P(x \leq x_2) - P(x \leq x_1)$$

ومن هنا يمكننا نجد أن

$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

(d) إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنفصل  $X$  هي أيضا منفصلة.

(e) إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل  $X$  هي أيضا متصلة ويمكن كتابة وذلك

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

(f) إذا كانت  $F(x)$  هي دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتصل أم المنفصل فإن:

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

مثال (5-12): إن الدالة الاحتمالية للمتغيرة العشوائي المنفصل  $X$  معطاة بالعلاقة التالية:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{55} x & , \quad x = 1, 2, \dots, 10 \\ 0 & \text{لقيم } X \text{ الأخرى} \end{cases}$$

(a) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$ .

(b) باستخدام دالة التوزيع أوجد

$$P(x > 2) \quad (3)$$

$$P(x \leq 3) \quad (2)$$

$$P(2 \leq x \leq 4) \quad (1)$$

الحل : (a) من تعريف دالة التوزيع فإن:

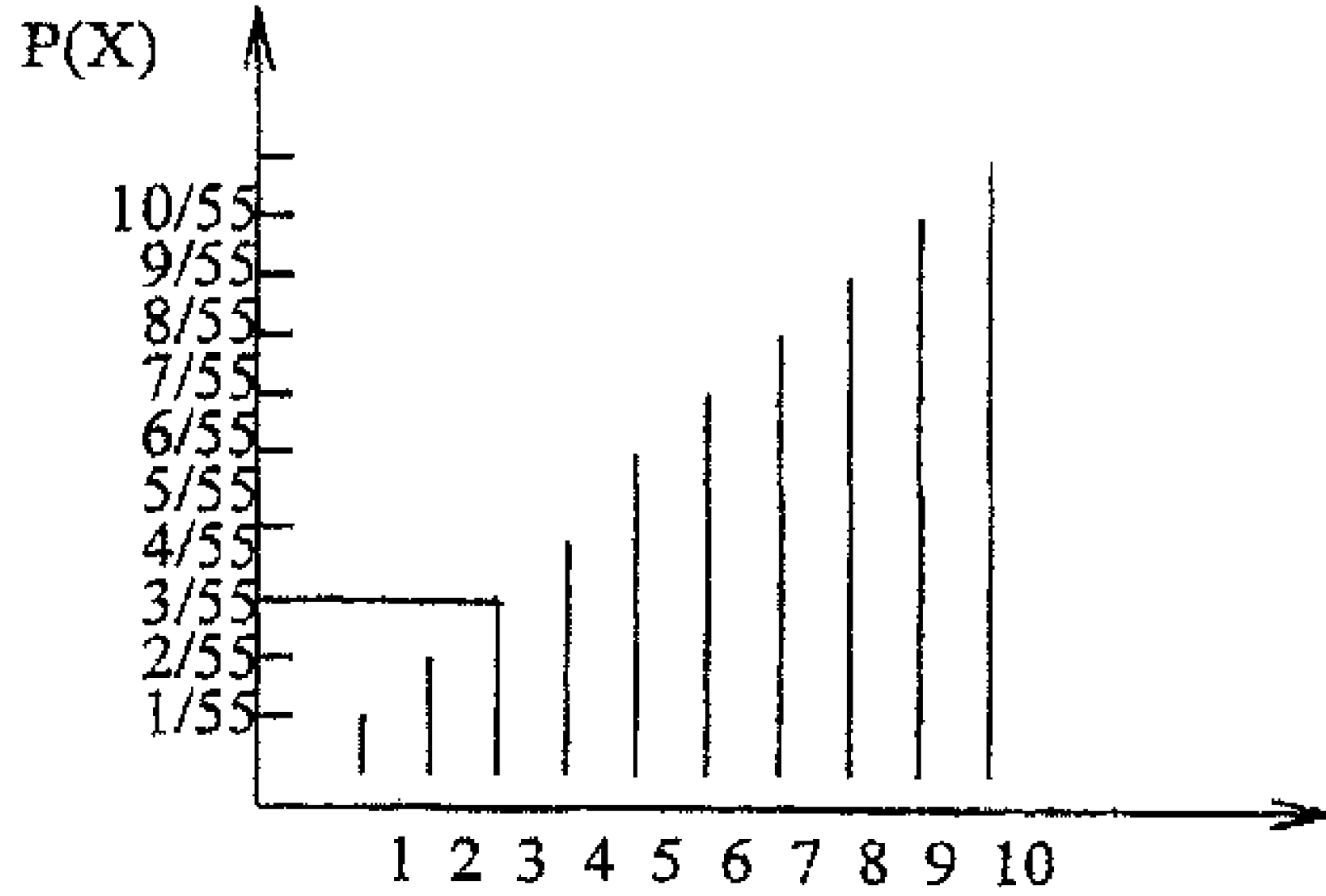
$$F(x) = \sum_{n=1}^x P(n) = \sum_{n=1}^x \frac{1}{55} \cdot n = \frac{1}{55} \sum_{n=1}^x n$$

$$= \frac{1}{55} \cdot \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{110}$$

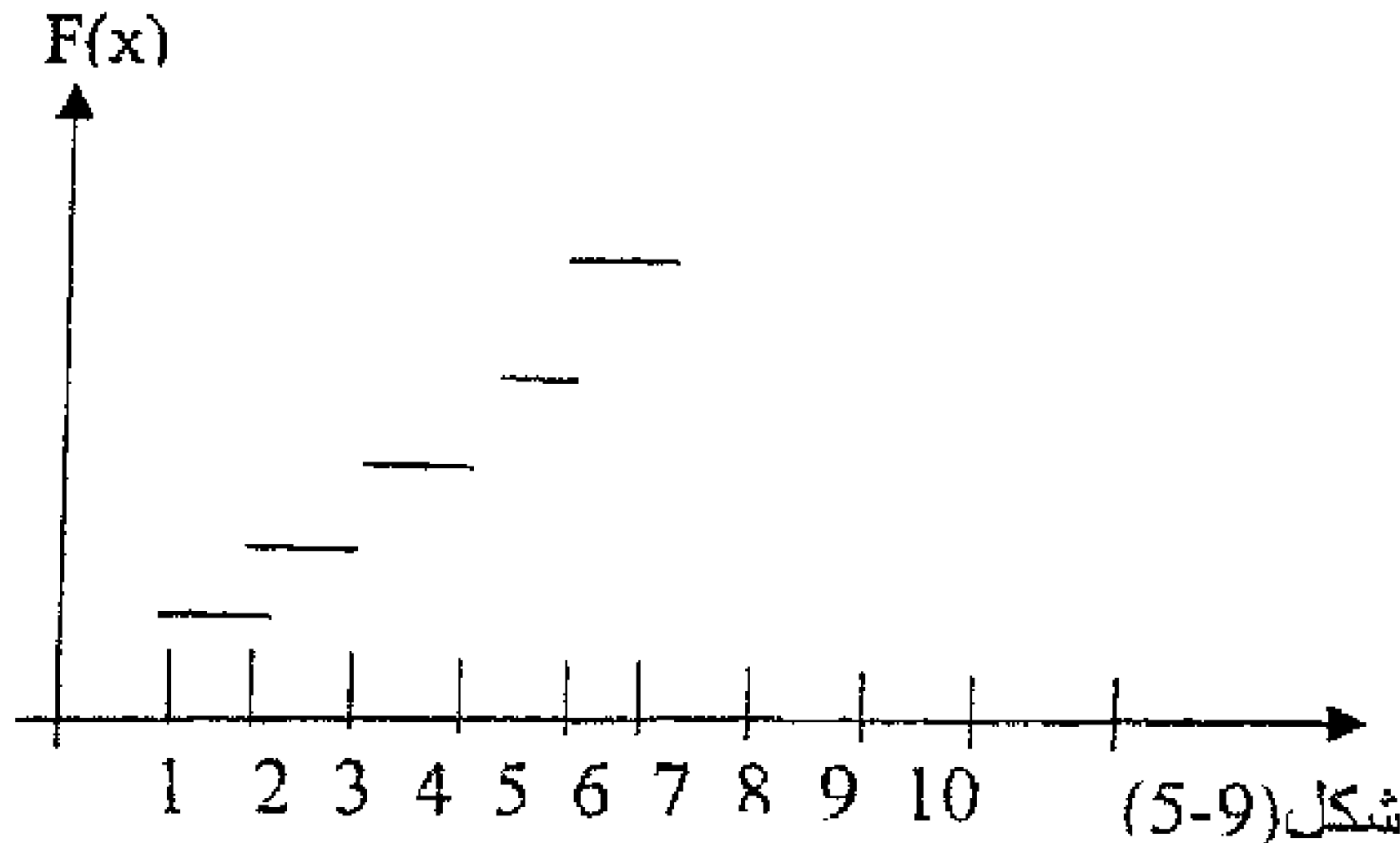
وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع على النحو التالي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{110} & , x = 1, 2, \dots, 10 \\ 1 & , x \geq 10 \end{cases}$$

وبيان الدالة الاحتمالية مبين بالشكل (5-8) بينما بيان دالة التوزيع مبين بالشكل (5-9)



شكل (5-8)



شكل (5-9)



(b) ومن دالة التوزيع فان

$$1) P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2) = \frac{20}{110} - \frac{2}{110} = \frac{18}{110} = \frac{9}{55}$$

$$2) P(X \leq 3) = F(3) = \frac{6}{55}$$

$$3) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{6}{110} = \frac{104}{110} = \frac{52}{55}$$

مثال (5-13) : إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة بالعلاقة التالية :

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{نقيم } X \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب : إثبات أنه لأي قيم  $m, r$  الصحيحة والموجبة فإن المساواة  
متحققة  $P(X > m + r / X > m) = P(X \geq r)$

الحل : من العلاقة (5-12) فان

$$F(x) = \sum_{n=0}^x \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^n = \frac{1}{3} \left[ 1 + \frac{2}{3} + \dots + \left( \frac{2}{3} \right)^x \right] = 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{x+1}$$

والصيغة أعلاه تكتب على النحو

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{x+1} & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

وعليه فإن

$$\begin{aligned}
 P(x > m+r / x > m) &= \frac{P(x > m+r)}{P(x > m)} = \frac{1 - P(x \leq m+r)}{1 - P(x \leq m)} \\
 &= \frac{1 - \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{m+r+1} \right]}{1 - \left[ 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^{m+1} \right]} = \left( \frac{2}{3} \right)^r \\
 &= P(x > r-1) = P(x \geq r)
 \end{aligned}$$

مثال (5-14) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطى بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(x+3) & , 1 < x < 3 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب (a) إيجاد دالة التوزيع للمتغير  $X$ .  
(b) حساب كل من الاحتمالات التالية:

$$1) P(1.3 < x < 2) \quad 2) P(x > 2.5) \quad 3) P(x < 1.5)$$

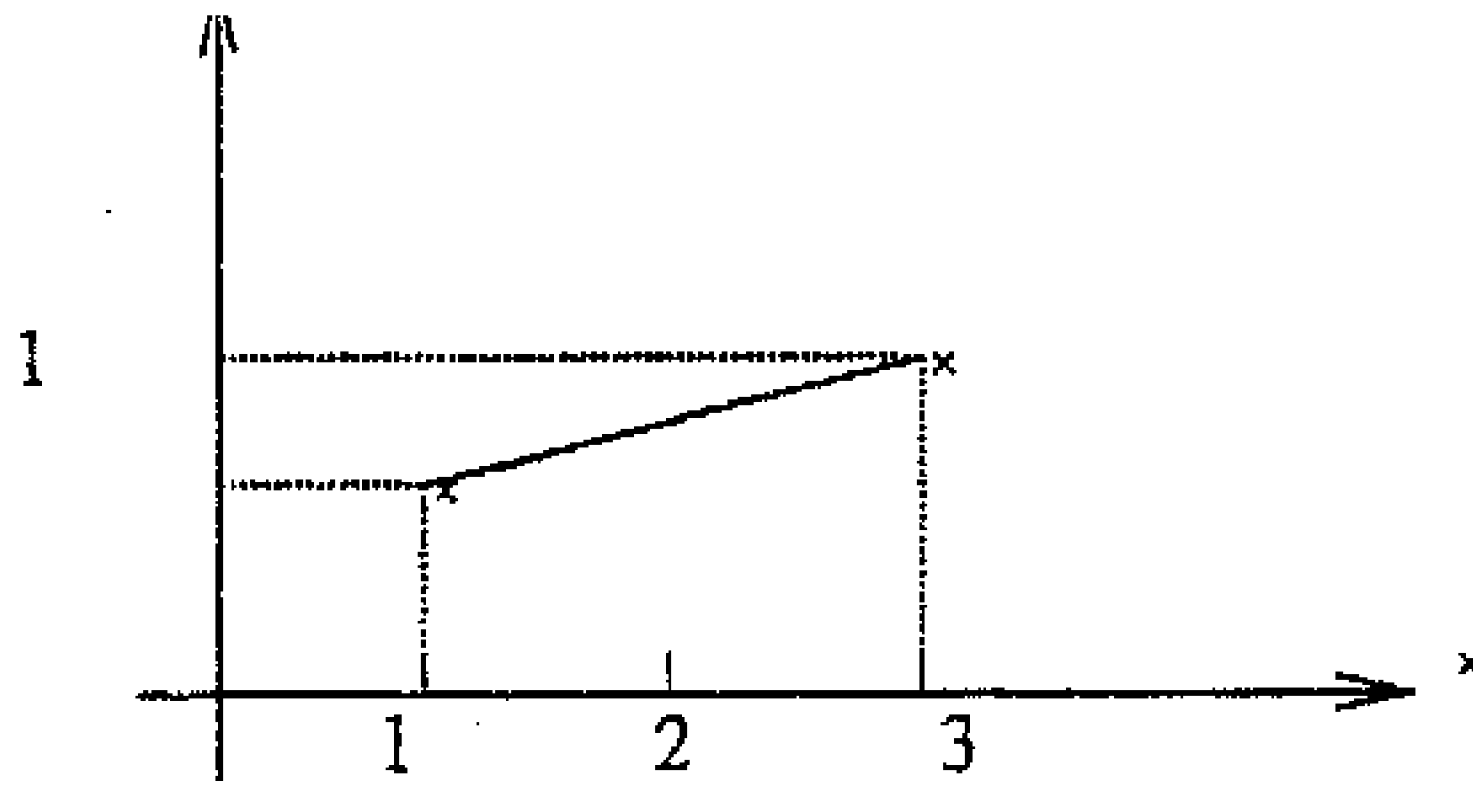
الحل : (a) من علاقة دالة التوزيع للمتغير فإن

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_1^x \frac{1}{10}(3+t)dt = \frac{1}{10} \left( 3t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^x \\
 &= \frac{1}{10} \left[ \left( 3x + \frac{x^2}{2} \right) - \left( 3 + \frac{1}{2} \right) \right] \quad \frac{1}{2} \text{ وتأخذ العامل المشترك} \\
 F(x) &= \frac{1}{20} [x^2 + 6x - 7]
 \end{aligned}$$

وعليه فإنه يمكن كتابة دالة التوزيع على الصورة.

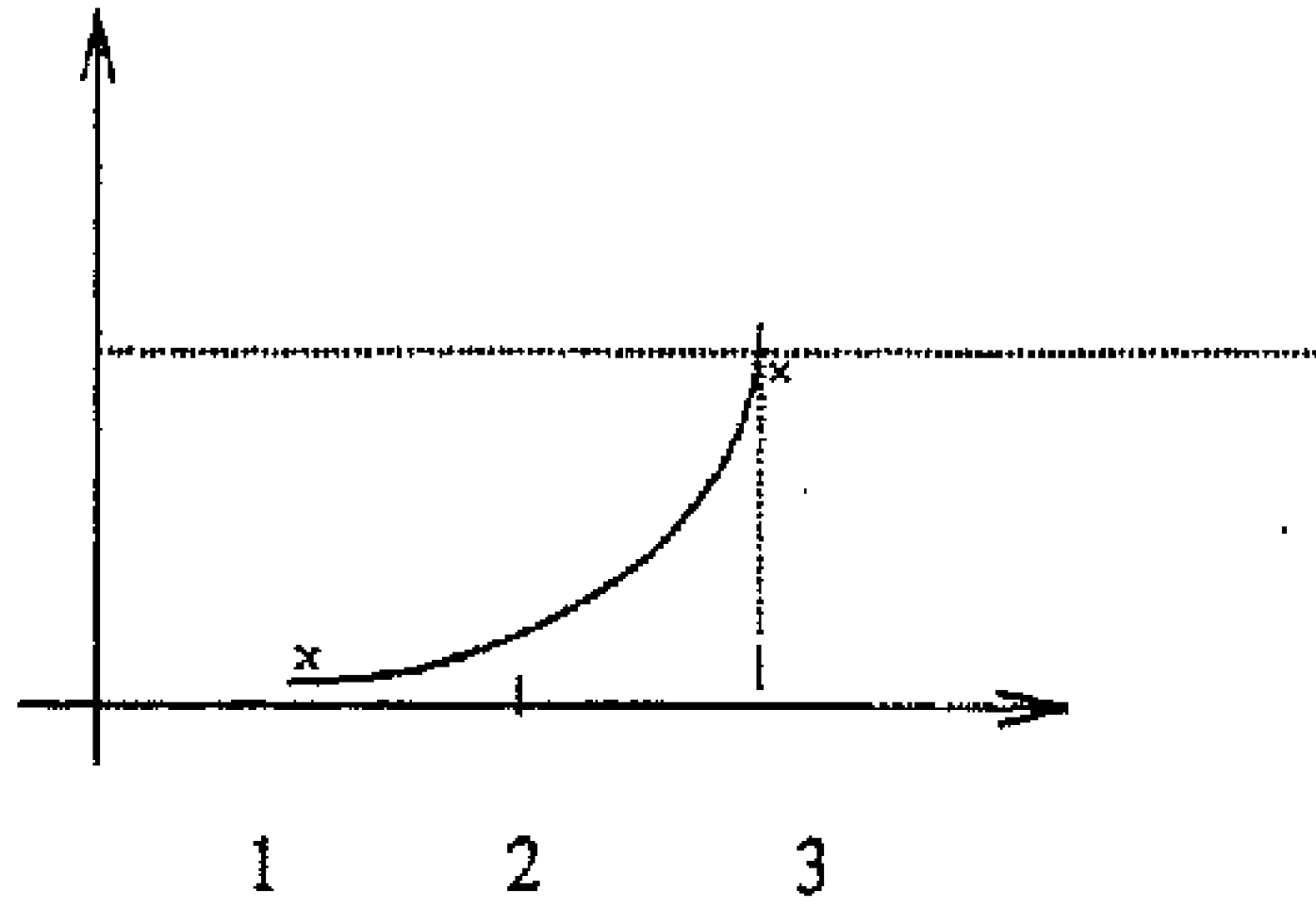
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 1 \\ \frac{1}{20}(x^2 + 6x - 7), & 1 < x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

وشكل (5-10) يمثل بيان دالة الكثافة الاحتمالية  $f(x)$



شكل (5-10)

أما الشكل (5-11) فيمثل بيان دالة للتوزيع للمتغير العشوائي  $X$ .



شكل (5-11)

(b) بالاستعانة بدالة التوزيع نجد الاحتمالات التالية:

$$1) P(1.3 < x < 2) = F(2) - F(1.3) = \frac{9}{20} = \frac{2.49}{20} = \frac{6.51}{20} = 0.3255$$

$$2) P(x > 2.5) = 1 - P(x \leq 2.5) = 1 - F(2.5) \\ = 1 - \frac{14.25}{20} = 0.2875$$

$$3) P(x \leq 1.5) = F(1.5) = \frac{1}{20} [(1.5)^2 + 6(1.5) - 7] = \frac{1}{20} [2.25 + 9 - 7] \\ = \frac{4.25}{20} = 0.2125$$

مثال (5-15) : القى حجر نرد و كان المتغير العشوائي يمثل خمسة أضعاف الوجه الظاهر وعلى اعتبار ان القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي قيم فردية أوجد احتمال أن تكون قيمة  $x \leq 15$ .

الحل : إن للقيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي  
 $x = 5i, i = 1, 2, \dots, 6$   
 ودالة التوزيع الاحتمالية هي :

$$P(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & , x = 5, 10, 15, 20, 25, 30 \\ 0 & \text{قيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

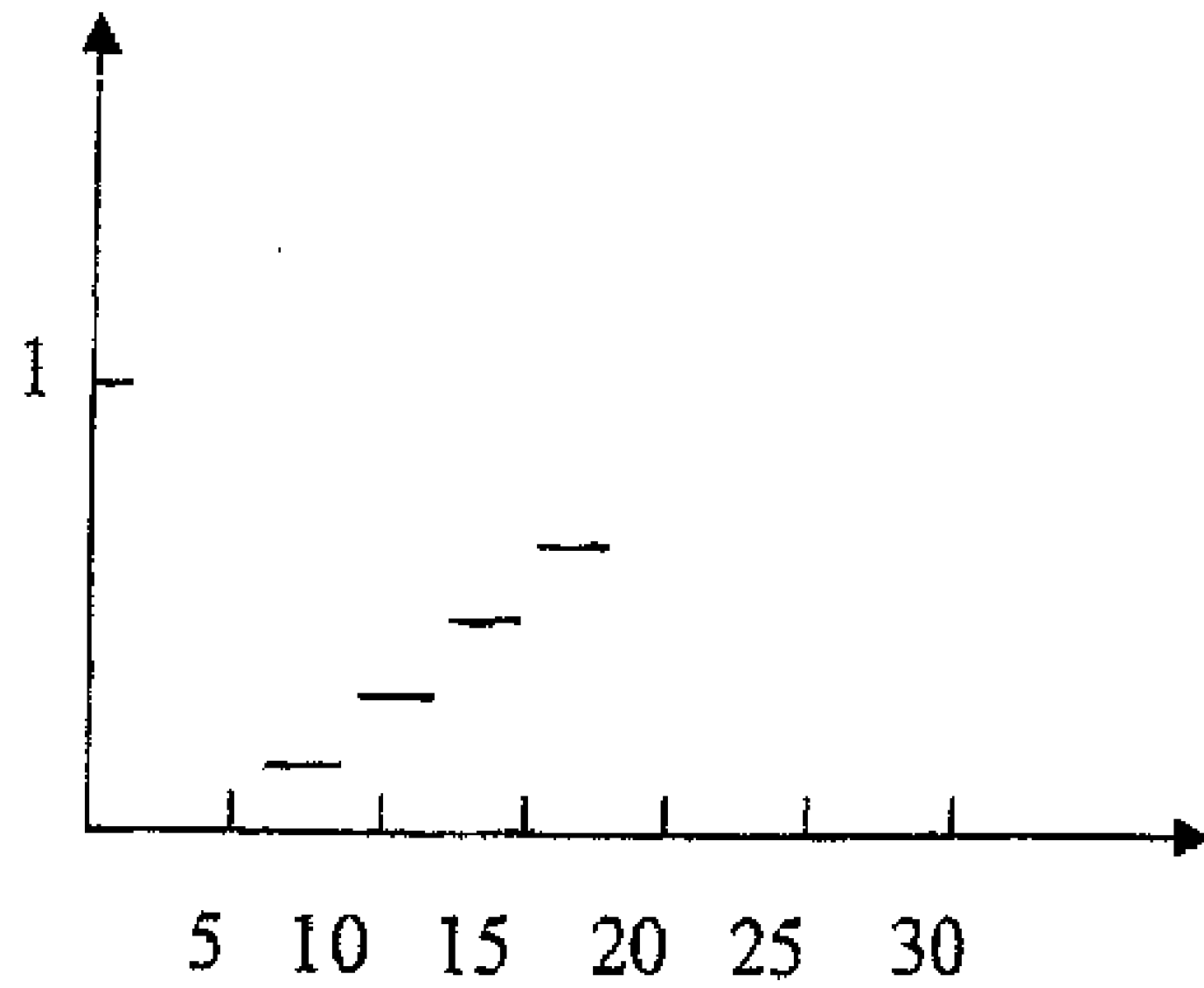
فان احتمال الشرطي المطلوب

$$P[(x \leq 15) / x( \text{فردى} )] = \frac{P[(x \leq 15) \cap (x \text{ فردى})]}{P(x \text{ فردى})} = F(15 / x = \text{فردى})$$

وهنا إذا اعتبرنا الحدث  $A = (x = \text{فردى})$  فإن أعلاه يصبح على الصورة

$$F(15 / A) = \frac{P[(x = 5) \cup (x = 15)]}{P[(x = 5) \cup (x = 15) \cup (x = 25)]} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

ويكون بيان الدالة  $F(x)$  كما هو مبين في شكل (5-12)



شكل (5-12) دالة (فردية)  $F(x/x=)$ .

وعليه تصبح دالة التوزيع على الصورة التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 5 \\ \frac{1}{6}(x - 4i) & , x = 5, 10, 15, 20, 25, 30 \\ & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 1 & , x \geq 30 \end{cases}$$

مثال (5-16) : لتكن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $f(x)$  أوجد دالة التوزيع الشرطية  $F(x/X \leq a)$  وكذلك دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية  $F(x/X \leq a)$

الحل : لتكن  $x < a$  وعليه فإن

$$F(x / X \leq a) = \frac{P[(X \leq x) \cap (X \leq a)]}{P(X \leq a)} = \frac{P(X \leq x)}{P(X \leq a)} = \frac{F(x)}{F(a)}$$

مع اننا نلاحظ أن  $[(X \leq x) \cap (X \leq a)] = (X \leq x)$

وأما إذا كانت  $X \geq a$  ومن كون  $[(X \leq x) \cap (X \leq a)] = (X \leq a)$  فإنه يمكن كتابة

$$F(x / X \leq a) = \frac{P[(X \leq x) \cap (X \leq a)]}{P(X \leq a)} = \frac{F(a)}{F(a)} = 1$$

ومن العلاقة (5-16) فإذا أخذت مشتقة  $F(x / X \leq a)$  فإن دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية تصبح

## 5-9 : الاحتمالات المشروطة ودوال التوزيع لها:

ليكن  $f(x)$  هو دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل ولناخذ الحادث  $A$  وإذا كان  $P(A) \neq 0$  فإن دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير العشوائي  $X$  والذي سنرمز له بالرمز  $f(X/A)$  يعرف على النحو التالي.

$$f(x/A) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[(X \leq x \leq x + \Delta x) / A]}{\Delta x}$$

$$f(x/A) = \frac{f(x)}{P(A)} \quad \dots\dots\dots (5-14)$$

وإن دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  هي

$$F(x/A) = \frac{P[(X \leq x) \cap \bar{A}]}{P(A)} \quad \dots\dots\dots (5-15)$$

وهنا نعني بـ  $[(X \leq x) \cap \bar{A}] = \{S; X(S) \leq x\}$

ومن العلاقة (5-14)، (5-15) فإنه يمكن كتابة

$$f(x/A) = \frac{d}{dx} F(x/A) \quad \dots\dots\dots (5-16)$$

إن خواص دالة التوزيع  $F(x)$  التي مرت سابقا تطبق على دالة التوزيع المشروطة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x/A) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x/A) = 1 \quad (a)$$

وهنا فإن  $-\infty$  هو الحد الأدنى للحادث  $A$ ،  $+\infty$  هو الحد الأعلى للحادث  $A$ .

$$\begin{aligned} F(x_2/A) - F(x_1/A) &= P[(x_1 < x \leq x_2) / A] \\ &= \frac{P[(x_1 < x \leq x_2) \cap A]}{P(A)} \quad (b) \end{aligned}$$

وكذلك أيضا فإن دالة الكثافة الاحتمالية  $f(x/A)$  تحمل نفس خصائص دالة الكثافة الاحتمالية وعليه فإن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/A) dx = F(+\infty/A) - F(-\infty/A) = 1$$

وهنا فإن  $+\infty$ ،  $-\infty$  هما الحد الأدنى والحد الأعلى لمنطقة التعريف.

وللمتغيرات العشوائية المنفصلة الدوال الاحتمالية الشرطية ودوال التوزيع الشرطية

تعرف بشكل مشابه فالدوال الاحتمالية الشرطية والدوال الاحتمالية ودالة التوزيع الشرطية تحمل نفس خواص دالة التوزيع.

$$F(x/X \leq a) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(a)} & , x < a \\ 0 & , x \geq a \end{cases}$$

مثال (5-17) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x & , 1 < x < 5 \\ 0 & , \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

(a) أوجد دالة التوزيع الشرطية  $F(x/X > 3)$

(b) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية  $f(x/X > 3)$

الحل : (a) دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  هي

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{12} t dt = \left[ \frac{1}{12} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{1}{24} (x^2 - 1)$$

ولأن  $x > 3$  فإن

$$\begin{aligned} F(x/X > 3) &= \frac{P(X \leq x) \cap (X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(3 < X \leq x)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{F(x) - F(3)}{1 - F(3)} = \frac{3F(x) - 1}{2} = \frac{x^2 - 9}{16} \end{aligned}$$

وعندما تكون  $x \leq 3$  فإن

$$F(x/X > 3) = \frac{P[(X \leq x) \cap (X > 3)]}{P(X > 3)} = 0$$

(b) دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية

$$f(x/X > 3) = \frac{dF}{dx}(X/X > 3) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & , 3 < x < 5 \\ 0 & , \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

## جمع الاحتمالات

ليكن لدينا الأحداث التالية  $A_1, A_2, \dots, A_n$  وتحقق الشروط التالية :

$$i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \phi \quad (a)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad (b)$$

$$F(x) = P(A_1).F(x/A_1) + \dots + P(A_n).F(x/A_n)$$

## 10-5 : دوال التوزيع والاحتمال للتحويل $Y = g(x)$

إن المتغير العشوائي الذي سنهتم به هو المتغير  $Y$  وهو دالة المتغير العشوائي  $X$  (سواء كان متصلاً أم منفصلاً) والذي سنعتبر عنه بالصورة

$$Y = g(X) \quad \dots\dots\dots (5-17)$$

$$Y = g(x) \quad \dots\dots\dots (5-18)$$

### 1-10-5 : التحويل في المتغيرات العشوائية المتصلة

إذا كان  $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$  فإننا نقول للدالة  $g(x)$  بأنها دالة متزايدة تماماً وبالمقابل إذا كان  $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$  فإن الدالة  $g(x)$  متناقصة تماماً. وفي الاقتربات الوتيرية فإن لكل قيمة من قيم  $x$  لها صورتها الوحيدة في  $g(x)$  وفي البداية لنناقش حالة الدالة الوتيرية المتزايدة. ولتكن دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  هي  $F_X(x)$  ودالة الكثافة الاحتمالية هي  $f_X(x)$  ولتكن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $Y$  هي  $y_i = g(x_i)$  والتي تدل على المتغير العشوائي  $X$  والقيم التي يأخذها هذا المتغير  $x_i$  ومن شكل (5-14) فإن

$$P(Y \leq y_i) = P(X \leq x_i) \quad \dots\dots\dots (5-19)$$

ومن العلاقة (5-19) فإنه يمكن كتابة

$$F_Y^1(y) = F_X(x) \quad \dots\dots\dots (5-20)$$

ومن العلاقة (5-18) فإن الدالة العكسية للدالة  $g(x)$  هي

$$x = g^{-1}(y) \quad \dots\dots\dots (5-21)$$

وإذا كان المتغير العشوائي  $X$  متصلاً فإن المتغير العشوائي  $Y$  الذي يدل عليه يكون



متصلا أيضا وإذا أخذنا المشتقة بالنسبة  $y$  لكلا طرفي العلاقة (5-20) فإن

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

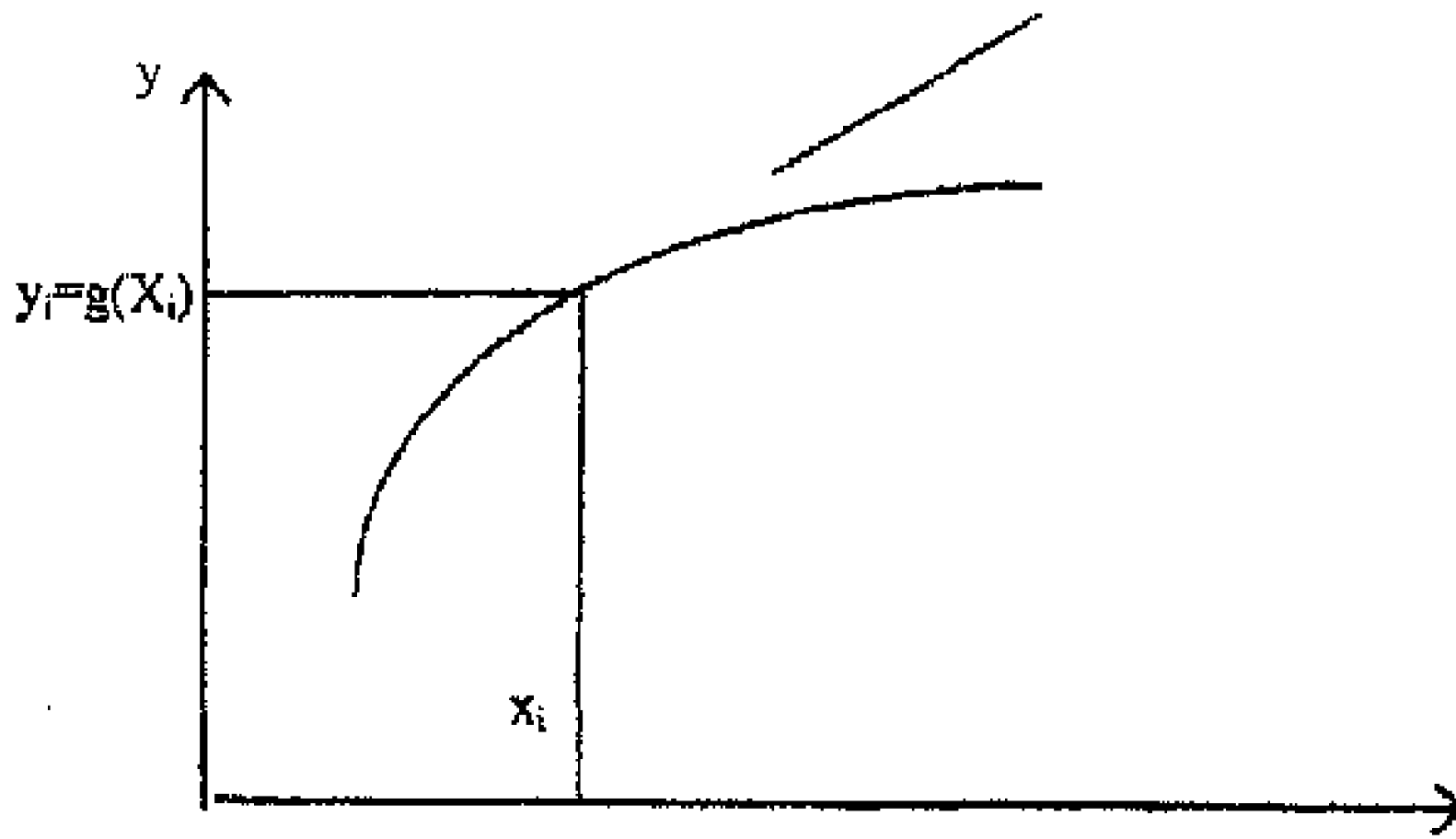
$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \frac{dx}{dy}$$

وحسب العلاقة (5-21) فإن

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(g^{-1}(y))}{dy}$$

ومن العلاقة (5-21) فإن

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \dots\dots\dots (5-23)$$



شكل (5-13) الدالة الوتيرية المتزايدة

مثال (5-18) : إذا أخذنا بالاعتبار المتغير العشوائي  $X$  بالمثال (5-14) وكان المتغير العشوائي  $Y$  معرف بالعلاقة

$$Y = g(x) = 5x + 3$$

أوجد دالة التوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $Y$ .

الحل : لقد وجدت دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  على النحو

$$F_X(x) = \frac{1}{20}(x^3 + 6x - 7)$$

وبما أن الدالة  $g(x)$  دالة وتيرية متزايدة وحسب العلاقة (5-21) فإن  $x = \frac{y-3}{5}$  ومن

العلاقة (5-23) ينتج أن

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-3}{5}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{y-3}{5}\right) = \frac{1}{10} \left[ 3 + \left(\frac{y-3}{5}\right) \right] \frac{1}{5}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{250}y + \frac{6}{125} & , \quad 8 < y < 18 \\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى.} \end{cases}$$

أما دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $Y$  فهي.

$$F_Y(y) = \int_8^y \left( \frac{1}{250}t + \frac{6}{125} \right) dt = \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125}$$

وعليه يمكن كتابة دالة التوزيع على الصورة التالية :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq 8 \\ \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125} & , 8 < y < 18 \\ 1 & , y \geq 18 \end{cases}$$

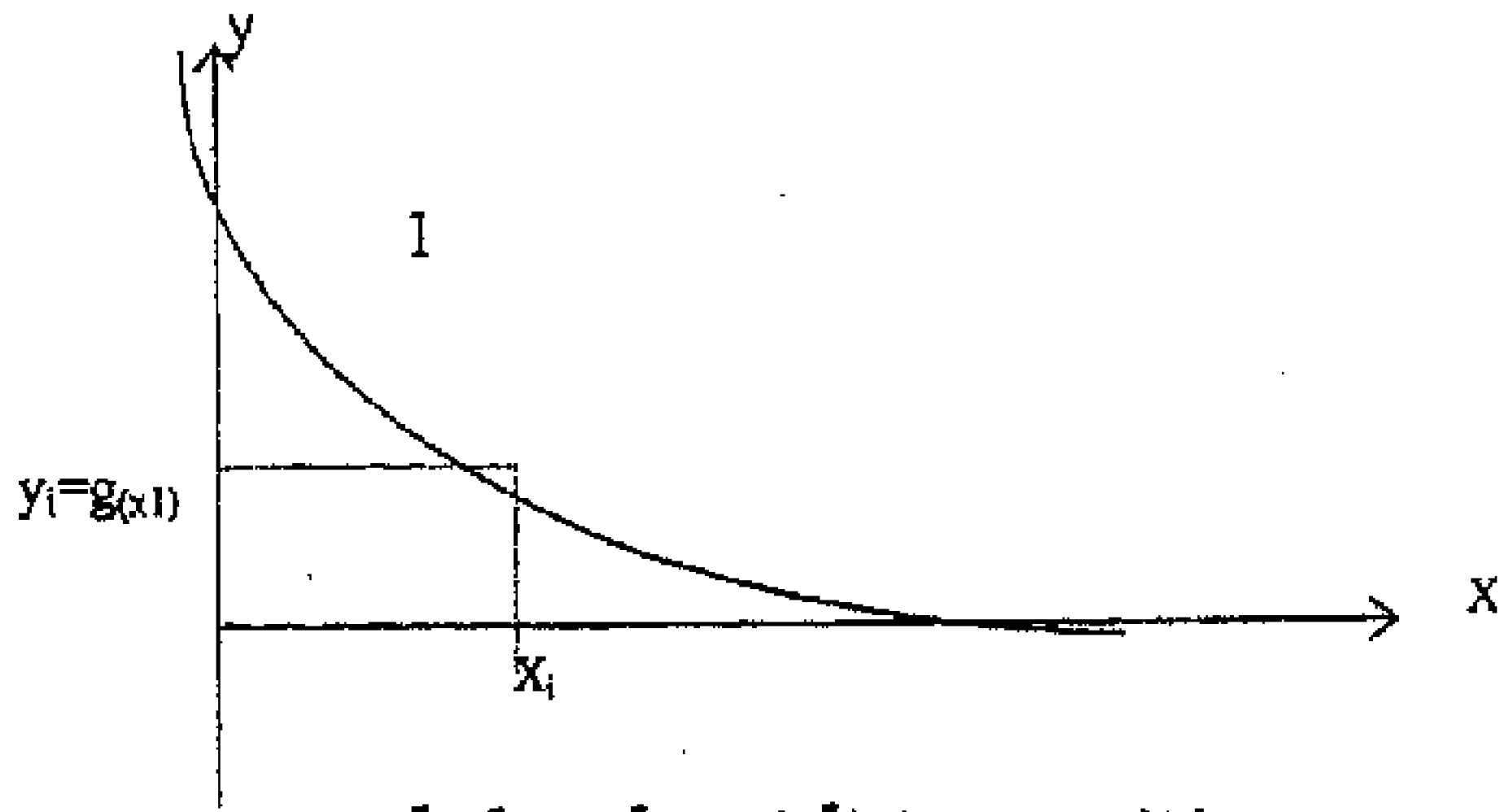
ويمكن إيجاد دالة التوزيع من العلاقة (5-20). على النحو التالي:

$$F_Y(y) = F_X(X) = F_X\left(\frac{y-3}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{20} \left[ \left(\frac{y-3}{5}\right)^2 + 6\left(\frac{y-3}{5}\right) - 7 \right]$$

$$= \frac{1}{500}y^2 + \frac{6}{125}y - \frac{64}{125}$$

والآن لنناقش حالة ما إذا كان  $g(x)$  دالة وتيرية متناقصة فلو دققنا في الشكل (15) لاحظنا أن :



شكل (5-14) الدالة الوتيرية المتناقصة.

أن  $P(Y \leq y_i) = P(X > x_i)$  وعليه فإن

$$F_Y(y) = 1 - F_X(x) \quad \dots\dots\dots (5-24)$$

ومرة أخرى  $x = g^{-1}(y)$  وعند أخذ المشتقة بالنسبة لـ  $y$  لكلا طرفي العلاقة (5-24) فإن

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} \quad \dots\dots\dots (5-25)$$

وهنا دائما إشارة سالبة ولهذا يمكن كتابة العلاقة (5-25) بالصورة التالية.

$$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad \dots\dots\dots (5-26)$$

مثال (5-19) : إذا أخذنا بعين الاعتبار المتغير العشوائي في المثال (5-14) وليكن المتغير العشوائي  $Y = g(X) = -3x$  والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $Y$ .

الحل : بما أن الدالة  $g(x)$  دالة وتيرية متناقصة وحسب العلاقة (5-21) فإن  $x = \frac{-y}{3}$  ومن العلاقة (5-25) أو (5-26) فإنه يمكن الحصول على

$$-\frac{1}{10}\left[3+\left(\frac{-y}{3}\right)\right]\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$f_Y(y) \begin{cases} -\frac{1}{90}y + \frac{1}{10} & , -9 < y < -3 \\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-9}^y \left(-\frac{1}{90}t + \frac{1}{10}\right) dt = -\frac{1}{180}y^2 + \frac{1}{10}y + \frac{27}{20}$$

وعليه فإن دالة التوزيع تكتب بالصورة التالية :

وأما دالة التوزيع للمتغير  $Y$  فهي :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \leq -9 \\ -\frac{1}{180}y^2 + \frac{1}{10}y + \frac{27}{20} & , -9 < y < -3 \\ 1 & , y \geq -3 \end{cases}$$

وكذلك يمكن إيجاد  $F_Y(y)$  من العلاقة (5-24) على النحو التالي.

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(-\frac{Y}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{20}\left[\left(-\frac{y}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{y}{3}\right) - 7\right]$$

$$= -\frac{1}{180}y^2 + \frac{1}{10}y + \frac{27}{20}$$

## 2- 10- 5: التحويل في المتغيرات العشوائية المنفصلة:

لنأخذ الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل  $X$  والمتغير العشوائي  $Y$  والمعرف بالشكل التالي

$$Y = g(X)$$

وإذا كانت القيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $X$  هي  $x_i$  والقيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $Y$  هي  $y_i = g(x_i)$  ولكل قيمة  $X$  يوجد قيمة وحيدة لـ  $g(x)$  عليه فإن الدالة الاحتمالية لـ  $Y$  هي

$$P_Y(y) = P_X(X) \quad \dots\dots\dots (5-27)$$

وهنا  $P_X(x)$  هي الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$

$$X = g^{-1}(y) \quad \dots\dots\dots (5-28)$$

والعلاقة أعلاه تعني الدالة العكسية للعلاقة المعرفة في العلاقة (5-21).

مثال (5-20) : ليكن المتغير العشوائي  $X$  والمعرف في مثال (5-12) وليكن  $Y = 3x + 2$  دالة المتغير العشوائي  $X$ . والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $Y$ .

الحل : من العلاقتين (5-28)، (5-27) فإن الدالة الاحتمالية للمتغير  $Y$  هي:

$$P_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{55} \left( \frac{y-2}{3} \right) & \\ \frac{y-2}{165} & , y = 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 \\ 0 & \text{لقيم } y \text{ الأخرى} \end{cases}$$

ومن كون دالة التوزيع للمتغير  $X$  هي  $F_X(x) = \frac{x(x+1)}{110}$  فإن دالة التوزيع للمتغير  $Y$  هي

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y < 5 \\ \frac{(y-2)(y+1)}{990} & , y = 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32 \\ 1 & , y \geq 32 \end{cases}$$

3- 10- 5 : دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $Y=x^2$

لتكن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$  هي  $f(x)$  وأن  $Y=X^2$  والقيم التي يأخذها المتغير العشوائي  $Y$  هي  $y=x^2$  في هذه الحالة فإن كل قيمة تأخذها  $y$  هناك قيمتان تأخذهما  $X$ . وعليه فإن دالة التوزيع

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x) dx$$

وإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير  $Y$  هي

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(\sqrt{y}) \frac{d}{dy}(\sqrt{y}) - f_X(-\sqrt{y}) \frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$$

وعليه يمكن كتابة الدالة على النحو

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & , y \geq 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5-29)$$

مثال (5-21) : ليكن المتغير العشوائي المتصل  $X$  ودالة كثافته الاحتمالية

$$f_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

$$Y = X^2$$

أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $Y$ .

الحل : من العلاقة (5-29) فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير  $Y$  هي

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & , y > 0 \\ 0 & , y < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5-30)$$

والعلاقة (5-30) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع جاما.

## تمارين الفصل الخامس

- (1) إذا كان  $X$  هو المتغير العشوائي الذي يأخذ القيم 3, 1, -2 باحتمالات 0.1, 0.5, 0.4 والمطلوب هو إيجاد :
  - (a) القيمة المتوقعة لهذا المتغير.
  - (b) تباين  $X$ .
  - (c) الانحراف المعياري للمتغير  $X$ .
- (2) إذا كان تباين المتغير العشوائي  $X$  هو 20 والمطلوب إيجاد :
  - (a) تباين  $3X-4$
  - (b) تباين  $X-6$
- (3) إذا كان المتغير العشوائي  $X$  متغيراً منفصلاً يأخذ القيم 100, 80, 50 باحتمالات 0.1, 0.3 أوجد تباين المتغير العشوائي  $Y = \frac{X-80}{10}$ .
- (4) إذا كان المتغير العشوائي المنفصل  $X$  يأخذ القيم  $(n+m+1), (+m), \dots$  ،
  - (a)  $(n+2)$  و  $(n+1)$  باحتمالات متساوية والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير  $X$ .
- (5) لدينا 5 كتب رياضيات، 7 كتب فيزياء، 8 كتب كيمياء سحب كتابين بطريقة عشوائية من بين هذه الكتب وكان السحب دون الإعادة وإذا كان  $X$  متغير عشوائي يمثل عدد كتب الفيزياء الظاهرة في العينة المسحوبة. أوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير.
- (6) إذا كان لدينا المتغير العشوائي المنفصل  $X$  وتوزيعه الاحتمالي  $P(X)$  ودالة التوزيع لهذا المتغير  $F(X)$  أثبت أن  $P(X_i) = F(X_i) - F(X_{i-1})$ .
- (7) كيس به ثلاث كرات بيضاء وسبعة حمراء، سحبت عينة من ثلاث كرات فكان السحب دون الإعادة فإذا كان المتغير العشوائي يمثل الفرق بين عدد الكرات البيضاء والحمراء في العينة والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي  $Y = 5X - 7$ .
- (8) إذا كانت قيم المتغير العشوائي هي  $m, (m-1), \dots, 3, 2, 1$  أعداد صحيحة وكان  $P(X = X_i) = \frac{2X_i}{K}$  حيث أن  $K$  عدد ثابت والمطلوب إيجاد قيمة  $K$ .
- (9) إذا كانت  $f(x)$  متصل ممثل بالقاعدة التالية.
 
$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 4x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$
 فهل  $f(x)$  يمثل دالة كثافة احتمالية ؟
- (10) إذا كان إنتاج مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية وكان المتغير العشوائي  $X$  يمثل عمر المصباح بالساعات وكانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1000} \cdot e^{-\frac{x}{1000}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

فإذا سحبنا وحدة واحدة من هذا الإنتاج فما احتمال أن يكون عمر المصباح أكثر من 1000 ساعة.

(11) إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$  معطاة بالعلاقة التالية:

$$P(x) = \begin{cases} K \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

أوجد قيمة  $K$  التي تجعل  $P(x)$  دالة كثافة احتمالية.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x \geq b \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير  $X$ .

(13) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطى بالعلاقة:

$$f(x) = \begin{cases} kx & , 0 \leq x \leq 1 \\ k & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

(a) أوجد قيمة  $k$ .

(b) بالتعويض عن قيمة  $k$  الموجودة احسب  $P(x \geq 1.5 / 0.5 \leq x \leq 1.7)$

(14) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد قيمة  $b$  التي تحققها المساواة  $P(X \leq b) = 2P(X > b)$ .

(15) الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل  $X$  معطاة بالعلاقة



$$P(x) = \begin{cases} 2kx & , x = 1, 2, 3. \\ k(1 + 2x) & , x = 4, 5, 6, 7. \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد .

(a) إيجاد قيمة الثابت  $k$ .

(b) بالتعويض عن قيمة  $k$  الموجودة أوجد  $P(x=2)$ ,  $P(x=6)$ ,  $P(2 < x < 5)$ .

(16) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{56}(x+3) & , 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

(a) أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$ .

(b) بمساعدة دالة التوزيع أوجد الاحتمالات التالية  $P(2 < x \leq 5)$ ,  $P(x=3)$ ,  $P(|x| \leq 3)$ .

(17) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & , -\alpha < x < \alpha \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد قيمة الثابت  $\alpha$  الذي يحقق المساواة  $P(x < 1) = \frac{3}{4}$ .

(18) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطى بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} & , 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع لهذا المتغير العشوائي .

(19) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} k \sin 2x & , 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد

(a) قيمة الثابت  $k$ .

(b) بالتعويض عن قيمة  $k$  الموجودة أوجد دالة التوزيع لهذا المتغير  $X$ .

(c) أوجد الاحتمالات التالية  $P\left(\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right)$  و  $P\left(x \leq \frac{\pi}{4}\right)$

(20) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  هي

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الشرطية  $F(x/0.2 < x \leq 0.7)$

(21) إن دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل معطاة بالعلاقة التالية

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد.

(a) دالة التوزيع الشرطية  $F(X/X < 5)$ .

(b) الدالة الاحتمالية الشرطية  $P(X/X < 5)$ .

(22) إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة بالعلاقة

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $Y = 3x$ .

# الفصل السادس

## التوزيعات الاحتمالية الهامة



## الفصل السادس

### التوزيعات الاحتمالية الهامة

1 - 6: التوزيعات المنفصلة :

1 - 1 - 6

: توزيع بيرنولي : Bernolli Distribution :

في تجربة ما إذا كانت النتائج المتوقعة هي النجاح والفشل ورمز لاحتمال النجاح بالرمز  $P$  فإن احتمال الفشل هو  $q = 1 - P$  وعليه فإن نتائج هذه التجربة تخضع لتوزيع بيرنولي والذي هو على النحو التالي :

$$P(x; P) = \begin{cases} P & , \quad x = 1 \\ 1 - P & , \quad x = 0 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6-1)$$

ودالة العزوم المولدة للتوزيع هي :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_i e^{tx_i} \cdot P(x_i) \\ &= (1 - P) + e^t \cdot P \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6-2)$$

والعزم المولد الأول هو  $M_X'(t) = P \cdot e^t$

والعزم المولد الثاني هو  $M_X''(t) = P \cdot e^t$

وعليه فإن  $E(X) = P = \mu$

$$E(X^2) = P$$

وعليه فإن التباين  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = P - P^2$

$$V(X) = P(1 - P) = P \cdot q$$

مثال (6-1) : في تجربة إلقاء قطعة نقود إذا رمزنا لظهور كتابة بالصففر ولظهور الصورة بالرمز 1 يعني  $0 = \text{كتابة } X$  ,  $1 = \text{صورة } X$  اكتب الدالة للمتغير  $X$  .

الحل : نعلم أن احتمال ظهور صورة في هذه التجربة  $= \frac{1}{2}$  وظهور كتابة هو  $\frac{1}{2}$

وعليه فإن الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع هي :

$$P\left(X_i \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x=1 \\ \frac{1}{2} & , \quad x=0 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

2 - 1 - 6 : توزيع ذات الحدين :

تحت نفس الشروط إذا أجريت تجربة وفي كل محاولة ينتج أحد النتائج المستقلة وكان احتمال النتيجة الأولى هو  $P$ . فإن احتمال النتيجة الأخرى هو  $1-P$ .

وعليه فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين هو :

$$b(x, n, P) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot (P)^x (1-P)^{n-x} & \dots (6-3) \\ 0 \end{cases}$$

وسنرمز لتوزيع ذات الحدين بالرمز  $b(x, n, P)$

وحتى تكون التجربة قابلة للتكرار يجب تحقيق الشروط التالية :

(1) يوجد نتيجتان للتجربة إما النجاح أو الفشل:

(2) احتمال النجاح طيلة فترة التجربة ثابت:

(3) عديمات التجربة مستقلة عن بعضها البعض:

مثال (2-6): به 5 كرات سوداء وعشرة حمراء سحب ثلاث كرات دون إعادة من هذا الكيس.

(a) احسب احتمال ظهور كرة سوداء من بين الثلاث كرات المسحوبة.

(b) احسب احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر من بين الكرات المسحوبة.

الحل : نلاحظ أن التجربة تحقق تجربة ذات الحدين ولنفرض أن عدد الكرات السوداء

المسحوبة يمثل المتغير العشوائي  $X$  ،  $n = 3$  ،  $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$  وعليه فإن التوزيع

الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$  هو

$$P\left(x; 3, \frac{1}{3}\right) = \begin{cases} \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-x} & , \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

(a) من تعريف دالة التوزيع الاحتمالي :

$$P_{X=1} = P\left(1, 3, \frac{1}{3}\right) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

(b) لإيجاد احتمال ظهور كرة سوداء أو أكثر فإن الاحتمال المطلوب :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= P\left(1; 3, \frac{1}{3}\right) + P\left(2; 3, \frac{1}{3}\right) + P\left(3; 3, \frac{1}{3}\right) \\
&= \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad (1) \\
&= \frac{12}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{19}{27}
\end{aligned}$$

(2) طريقة أخرى :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) \\
&= 1 - \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}
\end{aligned}$$

مثال (6-3) : إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  معطاة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

يراد اختيار خمسة قيم له بطريقة عشوائية ما احتمال أن يكون اثنان منها على الأقل أكبر من 1 :

الحل : إن احتمال أن تكون  $x$  أكبر من 1 هو :

$$P(x > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2}x dx = \left[ \frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

وا احتمال أن تكون  $x$  أقل من 1 هو :

$$P(x < 1) = 1 - P(x > 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

### 6-1-3: توزيع بواسون Poisson Distribution :

تعريف : إذا كان لدينا المتغير العشوائي المنفصل  $X$  ويأخذ القيم  $x = 0, 1, 2, 3, \dots$  وكانت الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع هي :

$$P(X = x) = \begin{cases} P(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \dots\dots\dots (6-4) \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

عندئذ نقول عن هذا التوزيع توزيع بواسون ولنا من الخصائص التالية :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \quad (a)$$

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad \text{العزم المولد لهذا التوزيع}$$

$$M_x(t) = e^{\lambda} (e^t - 1) \quad \dots\dots\dots (6-5)$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{c) القيمة المتوقعة للمتغير } X$$

$$V(X) = \lambda \quad \text{وتباين المتغير } X$$

نظرية (6-1) : تحت الشروط المذكورة أدناه فإن توزيع ذات الحدين الذي معلماته  $n, P$  يتحول إلى توزيع بواسون بمعلمة  $\lambda = nP$  والشروط هي :

a) أما  $P$  أو  $1-P$  يجب أن تقترب نحو الصفر والأخرى نحو الواحد الصحيح.

b) أن يكون  $n \rightarrow \infty$  ( $n \geq 30$ )

البرهان : ليكن توزيع ذات الحدين الذي معلماته  $n, P$  ويكتب على النحو التالي :

$$P(x; n, P) = \binom{n}{x} \cdot P^x (1-P)^{n-x}$$

أو

$$P(x; n, P) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-x+1)}{x!} \cdot P^x (1-P)^{n-x} \quad \dots (6-6)$$

وبما أن  $\lambda = Pn$  من هنا نستنتج أن

$$P = \frac{\lambda}{n}, 1-P = \frac{n-\lambda}{n}$$

وبوضع هذه القيمة بدلاً من  $P$  في (6-6) وكذلك بدلاً من  $1-P$  نصل إلى :

$$P(x; n, P) = \frac{n(n-1)\dots\dots(n-x+1)}{n^x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left[ \frac{n(n-1)\dots\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \right]$$

وبأخذ النهاية للطرف الأيمن عندما  $n \rightarrow \infty$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-x+1)}{n^x} \left(\frac{1-\lambda}{n}\right)^{n-x} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

وعليه فإنه يمكن كتابة :



$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x; n, P) = P(x, \lambda)$$

مثال (6-4) : ليكن المتغير العشوائي  $X$  المنفصل يخضع لتوزيع بواسون وفي هذا التوزيع

$$P(x \geq 3) \text{ فأوجد } P(x=2) = \frac{2}{3} P(x=1) \text{ إذا كان}$$

الحل : لإيجاد معلمات التوزيع نستفيد من المساواة المعطاة :

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} = \frac{2}{3} e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{3}{4} \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}, \lambda = 0$$

وعليه فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع هي :

$$P(X, \lambda) = \begin{cases} e^{-\frac{4}{3}} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{x!} & , \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

ويكون الاحتمال المطلوب.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^2 e^{-\frac{4}{3}} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{x!}$$

6-1-4: التوزيع الهندسي :

تعريف : التوزيع الهندسي هو التوزيع الموسع للمتغير العشوائي الذي يخضع لتوزيع ذات الحدين ، وتكون دالته الاحتمالية هي :

$$P(l; x, P) = \binom{x}{l} P(1-P)^{x-l} \dots\dots\dots (6-7)$$

هي دالة تمثل  $x$  ضعف دالة التوزيع الهندسي وعليه فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع الهندسي.

$$P(x; P) = \frac{P(l; x, P)}{x}$$

وتصبح على النحو التالي :

$$P(x, P) = \begin{cases} P(1-P)^{x-1} & \dots\dots\dots (6-8) \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

ولكي نجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي  $X$  نجد أولاً دالة العزوم المولدة للمتغير  $X$

$$M_X(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P(1-P)^{x-1}$$

$$= \frac{P \cdot e^t}{1 - (1-P)e^t} \quad \text{..... (6-9)}$$

ومنه نجد أن  $E(X) = \frac{1}{P}$   
وأن

$$V(X) = \frac{1-P}{P^2}$$

ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  هي :

$$F(X) = \sum_{n=1}^x P(1-P)^{n-1} = P \frac{1 - (1-P)^x}{P}$$

ويمكن كتابتها بصورة أخرى على النحو :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1 - (1-P)^x & , \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 1 & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{..... (6-9)}$$

**مثال (6-5) :** كيس به 8 كرات بيضاء، 4 كرات سوداء سحبت كرة من الكيس شرط الإرجاع والمطلوب :

(a) إذا كان  $x$  يمثل عدد المسحوبات لسحب كرة بيضاء. أوجد القيمة المتوقعة والتباين ثم دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$ .

(b) احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحبة الخامسة.

**الحل :** المتغير العشوائي  $X$  له توزيع هندسي حيث  $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$  أي أن  $P$  تمثل احتمال سحب كرة بيضاء وعليه فإن :

$$P\left(x, \frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{x-1} & , \quad x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{القيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

وتكون القيمة المتوقعة للمتغير  $X$  هي :

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

أما تبين المتغير العشوائي  $X$  فهو :

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

أما دالة التوزيع لهذا المتغير :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right)^x & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 1 & , x \rightarrow \infty \end{cases}$$

(b) احتمال ظهور كرة بيضاء في المرة الأولى في السحب الخامس.

$$P\left(5, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{243}$$

5-1-6: توزيع ذات الحدين السالب :

إن دالة التوزيع الاحتمالية لهذا المتغير  $X$  هي.

$$p(x, k, p) = \begin{bmatrix} x-1 \\ k-1 \\ 0 \end{bmatrix} P^k (1-P)^{x-k}, x = k, k+1, \dots (6-10)$$

$$M_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \binom{x-1}{k-1} \cdot P^k (1-P)^{x-k}$$

$$M_x(t) = \frac{e^{tk} \cdot P^k}{[1 - (1-P)e^t]^k} \quad \dots\dots\dots (6-11)$$

$$E(X) = \frac{k}{p} \quad \text{القيمة المتوقعة لهذا المتغير}$$

$$V(X) = \frac{k(1-P)}{p^2} \quad \text{تباين المتغير}$$

ويسمى توزيع ذات الحدين السالب بتوزيع باسكال :

مثال (6-6) : ألقيت قطعة نقود حتى ظهور صورتين فإذا علم أن عدد مرات الإلقاء كانت أكثر من ثلاث رميات احسب الاحتمال الشرطي لإلقاء أكثر من ستة رميات.

الحل : إن دالة الاحتمال المتعلقة بعدد الرميات هي :

$$P(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{2-1} \left(\frac{1}{2}\right)^x & , \quad x = 2, 3, 4, \dots \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

وللأحداث  $\{ \text{أكثر ثلاث رميات} \} = A$  ،  $\{ \text{أكثر من ست رميات} \} = B$  ،  $\{ \text{أكثر من ستة رميات} \} = A \cap B$  فإن الاحتمال المطلوب.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{x=7}^{+\infty} \binom{x-1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\sum_{x=4}^{+\infty} \binom{x-1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

$$= \frac{1 - \sum_{x=2}^6 (x-1) \left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \sum_{x=2}^3 (x-1) \left(\frac{1}{2}\right)^x}$$

### 6-1-6: التوزيع الهيرجيومتري :

لتوضيح هذا التوزيع نتناول مثالا بصيغته العامة :

ليكن كيس فيه  $N$  كرة منها  $r$  كرة بلون معين، سحب من هذا الكيس  $n$  كرة وكان السحب دون الإعادة فإذا أردنا حساب احتمال ظهور  $x$  بلون معين فإن هذا الاحتمال يوجد بالاستعانة بالتوزيع الهيرجيومتري ومعلمات هذا التوزيع  $N, n, r$  ودالته الاحتمالية :

$$P(x; N, n, r) = \frac{\binom{r}{x} \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad \dots (6-12)$$

قيم  $x$  الأخرى

ولصعوبة إيجاد دالة العزم للمولدة للمتغير العشوائي  $x$  فلن نعطي إيجاده هنا. أما القيمة

المتوقعة للمتغير العشوائي  $x$  الذي يتبع توزيع الهيرجيومتري  $E(x) = \frac{nr}{N}$

$$V(x) = \frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)} \quad \text{وأما تباينه}$$

### 6-2: التوزيعات المتصلة :

#### 6-2-1: التوزيع الطبيعي :

يعتبر التوزيع الطبيعي أحد أهم التوزيعات المتصلة ودالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty \quad \dots (6-13)$$

ونقول في هذه الحالة أن المتغير العشوائي  $X$  يمتلك توزيعاً طبيعياً. وسنعتبر عن التوزيع الطبيعي الذي معلماته  $\mu, \sigma$  حيث  $-\infty < \mu < +\infty, \sigma > 0$  بالرمز  $N(\mu, \sigma^2)$  أما بالنسبة لدالة العزم المولد للمتغير العشوائي  $X$  فهي :

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad \dots\dots\dots (6-14)$$

وبافتراض التحول  $y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow -\mu = \sigma y \Rightarrow x = \mu + \sigma y$  وبأخذ المشتقة لكلا الطرفين :  
 $\Rightarrow dx = \sigma dy$

وعليه فإن :

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma y + \mu)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma t y + \mu t} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma y - \frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma t y - y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{+\sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2 + 2\sigma t y + y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mu t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \cdot e^{\frac{(\sigma^2 t^2 - 2\sigma t y + y^2)}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\mu t} \cdot e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}} dy \\ M_X(t) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \quad \dots\dots\dots (6-15) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(y-\sigma t)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi} \quad \text{لأن}$$

ولإيجاد الوسط الحسابي  $\mu = E(X)$  باستخدام دالة العزم المولد فإننا نأخذ المشتقة الأولى لدالة العزم المولد ثم نأخذ المشتقة عند  $t = 0$  فنحصل على القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) أي أن :

$$\begin{aligned} E(x) &= M'_X(0) = e^{\mu t} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \mu + \frac{2\sigma^2 t}{2} \Big|_{t=0} \\ E(x) &= e^{0+0} (\mu + 0) = 1 \cdot \mu = \mu. \end{aligned}$$

أما إذا أَرنا إيجاد تباين المتغير العشوائي  $X$  فإننا نجد أولاً المشتقة الثانية للعلاقة (6-15).

$$E(x^2) = M_x''(0) =$$

وعليه فإن التباين يمكن أن نجده من العلاقة :

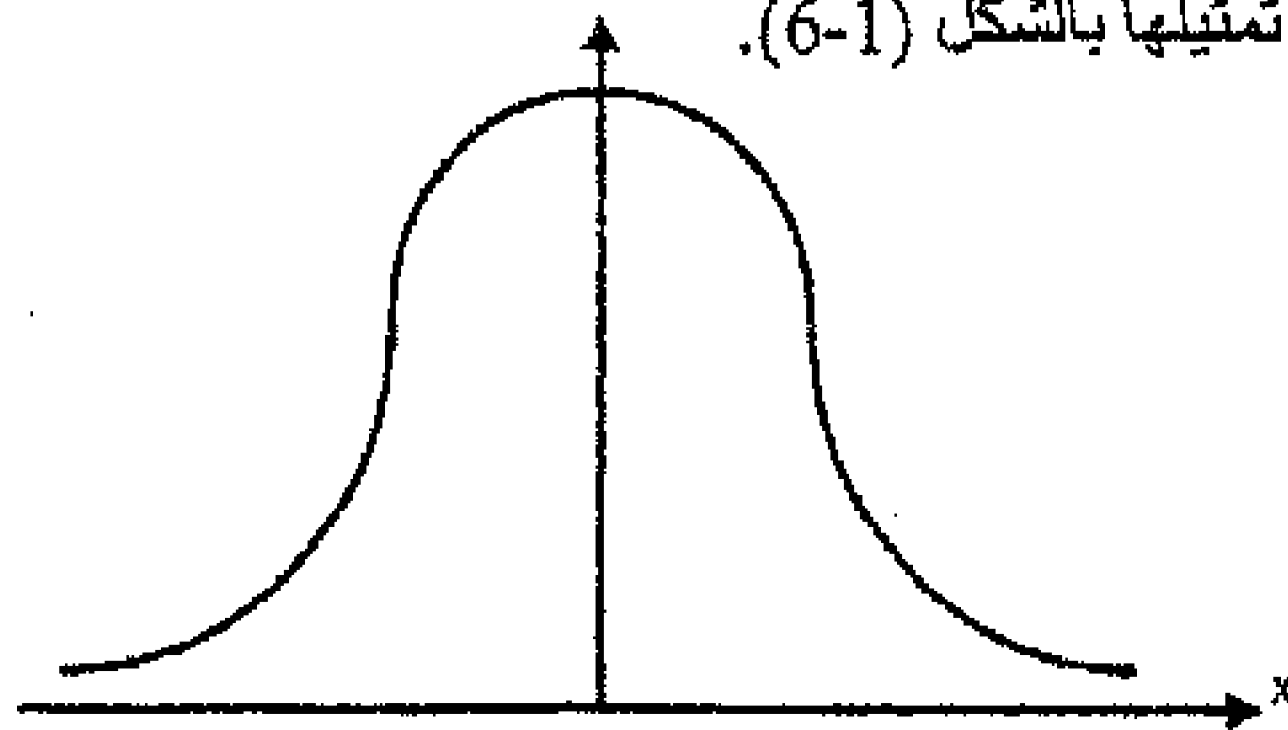
$$\sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sigma^2$$

التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) :

إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$  هي دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيع الطبيعي المعياري (القياسي)  $N(0,1)$  فإن دالة الكثافة للمتغير العشوائي  $X$  :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad \dots\dots\dots (6-16)$$

والعلاقة (6-14) يمكن تمثيلها بالشكل (6-1).



شكل (6-1)

ونلاحظ من الشكل بأن المساحة متماثلة حول الوسط يعني :

$$\Phi(-x) = \Phi(x) \quad \dots\dots\dots (6-17)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x) dx = 1 \quad \dots\dots\dots (6-18)$$

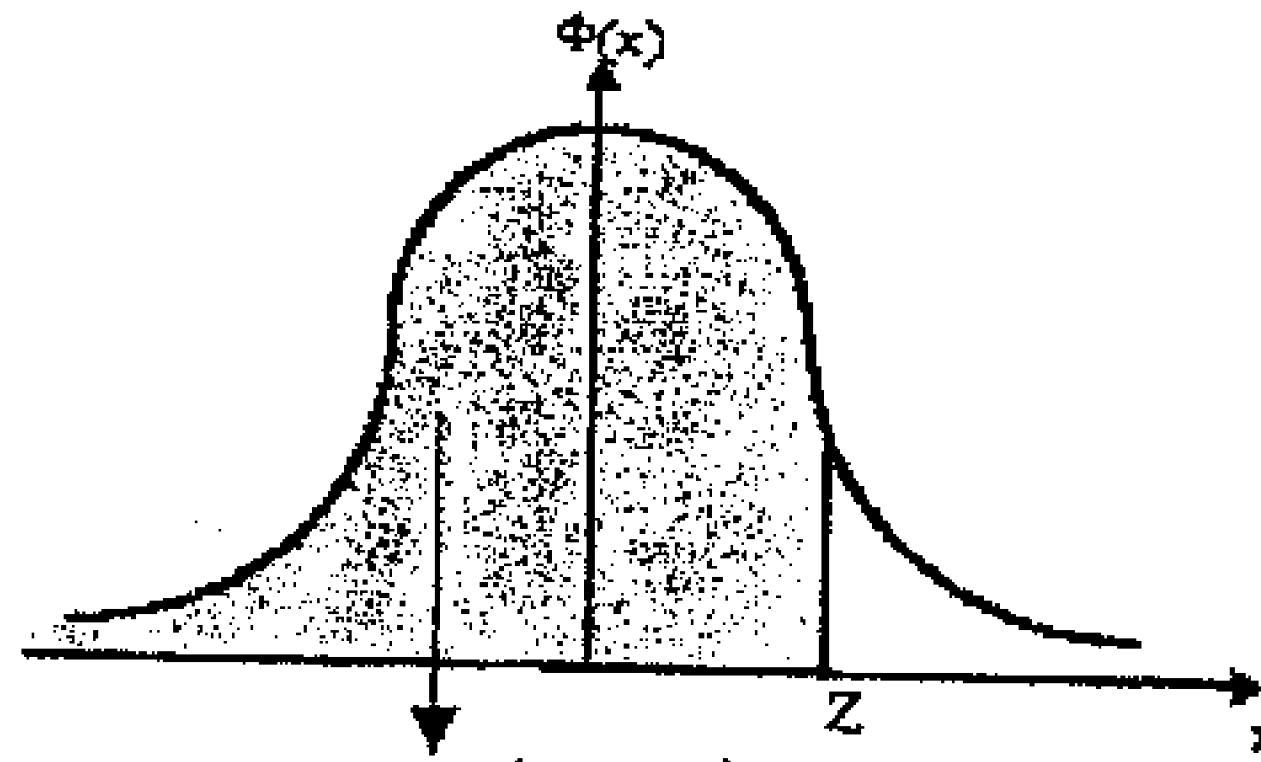
إن دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  الذي له توزيع طبيعي معياري (قياسي) هو :

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \Phi(x) dx \quad \dots\dots\dots (6-19)$$

ومن العلاقتين (6-16) ، (6-17) فإن :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

وقيمة  $\Phi(z)$  أي المساحة تحت المنحنى المحدد بقيمة  $z$  المعيارية يستخرج من الجدول ولا داعي للدخول في معادلات لا طائل لها. وقيمة  $\Phi(z)$  موضحة كما في شكل (6-2) فإن المنطقة المظللة :



شكل (6-2)

هي المساحة المحددة بقيمة  $z$ .  
ولإيجاد دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  الذي يمتلك التوزيع  $N(\mu, \sigma)$  فإن :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2} dt$$

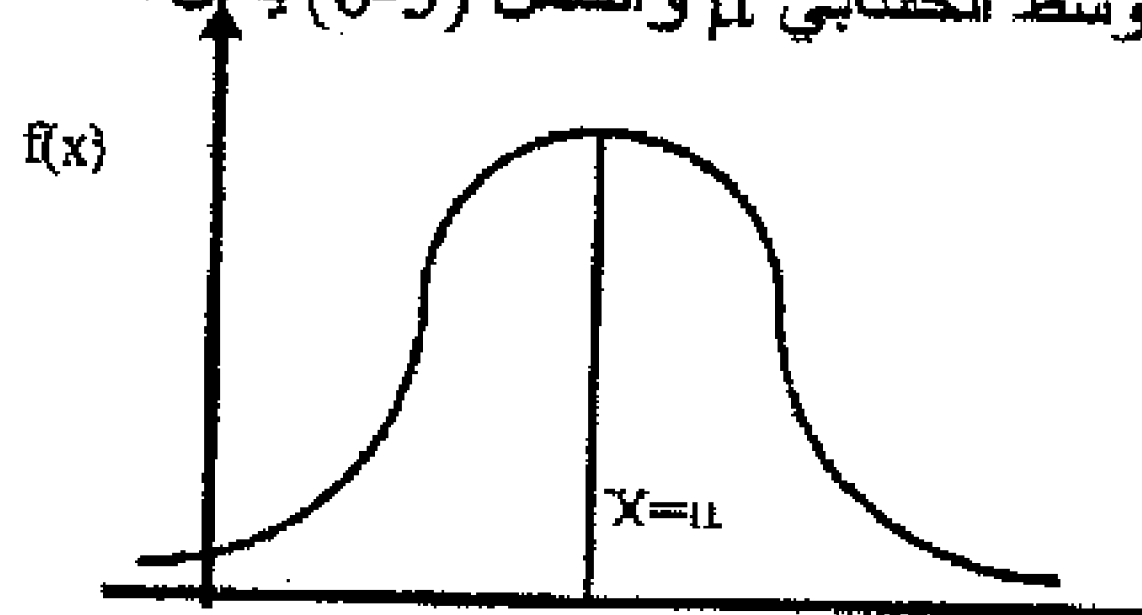
وعلى فرض أن  $y = \frac{t-\mu}{\sigma}$  فإن  $t = \sigma y + \mu$  وبأخذ المشتقة لكلا الطرفين فإن  $dt = \sigma dy$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \dots\dots\dots (6-20)$$

وعليه فإنه يمكن كتابة ،  $P(a < x \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(x > b) = 1 - P(x \leq b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

خواص التوزيع الطبيعي :  
(a) التوزيع متماثل حول الوسط الحسابي  $\mu$  والشكل (6-3) يمثل دالة الكثافة الاحتمالية .



شكل (6-3)



(b) يمكن إثبات أن  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

ولإثبات ذلك نأخذ  $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma} = dy = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad \dots\dots\dots (6-21)$$

ولنفرض أن التكامل في (6-21) هو A فإن :

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y^2+z^2)/2} dydz. \end{aligned}$$

ولحل مثل هذا التكامل الثاني (المتضاعف) نستخدم الإحداثيات القطبية  $y = r \sin \alpha$  ,  $z = r \cos \alpha$

وهنا فإن  $0 < \alpha < 2\pi$  ,  $dydz = r dr d\alpha$  ,  $0 < r < +\infty$

$0 < \alpha < 2\pi$

وعليه فإن :

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2/2} dr d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left( -e^{-r^2/2} \right)_0^{+\infty} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \alpha \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi - 0) = 1 \end{aligned}$$

وننتج أن  $A = 1$  وهو المطلوب.

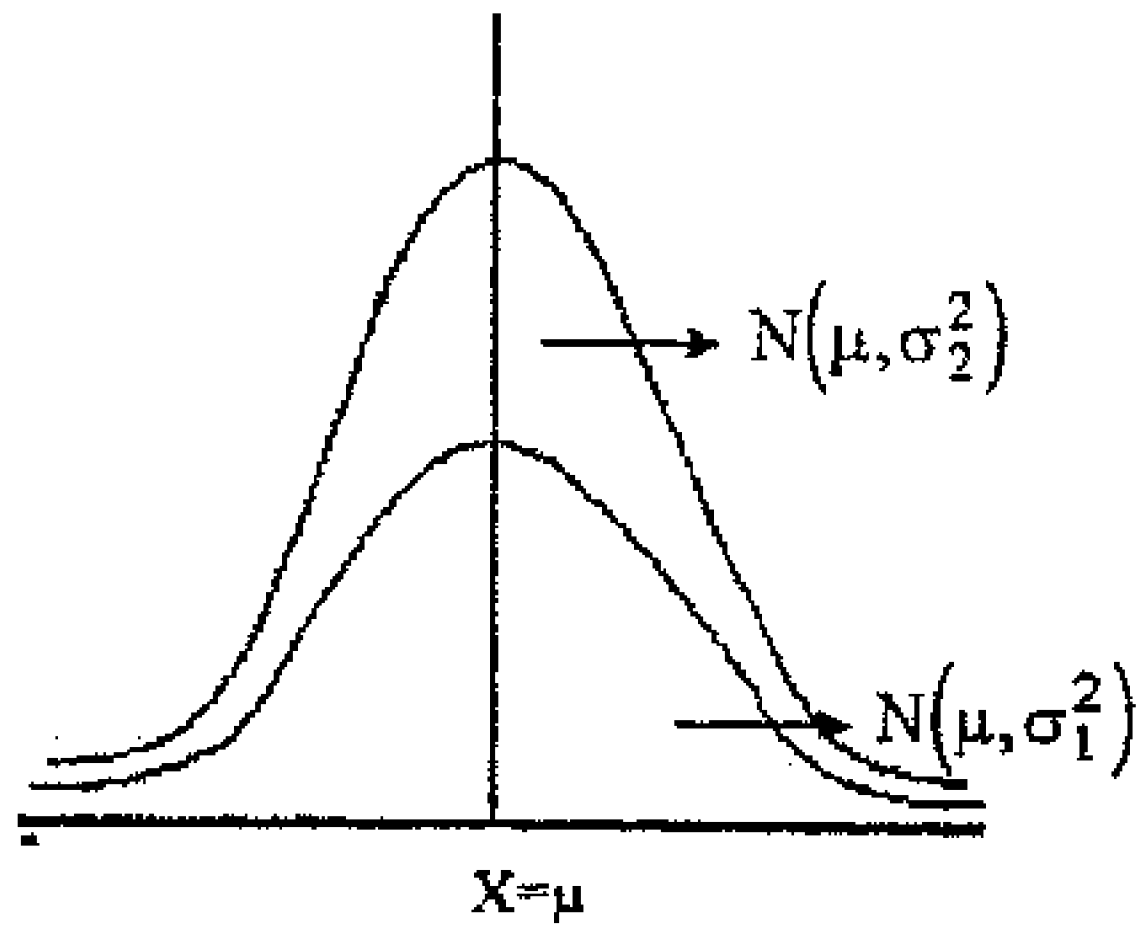
(c) التوزيع الطبيعي هو التوزيع الذي يمكن أن يقاس.

(d) التوزيع متصل.

(e) إذا كان المتغير العشوائي  $X_1$  يتبع التوزيع الطبيعي  $N(\mu, \sigma_1^2)$  ، والمتغير العشوائي  $X$

يتبع  $N(\mu, \sigma_2^2)$  وكان  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  فإن شكل (6-4) يوضح سلوكية كل التوزيعين حيث أن

لتوزيع نو الأكثر تباينا يكون أكثر تفرطحاً كما واضح من الشكل :



شكل (6-4)

مثال (7-6) : إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي  $\mu = 2$  ،  $\sigma = 2$  والمطلوب إيجاد :

(a)  $p(0 \leq x \leq 3)$  (b)  $p(|x| \leq 1)$  (c)  $p(-1 \leq x \leq 1 / 0 \leq x \leq 3)$

الحل : نحول القيم المعطاة إلى قيم معيارية ومن ثم حساب الاحتمالات المطلوبة من الجدول المعد لذلك على النحو.

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq 3) &= \Phi\left(\frac{3-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(-1) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) + \Phi(1) - 1 = 0.5328 \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} P(|x| \leq 1) &= P(-1 \leq x \leq 1) = \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2417 \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} P(-1 \leq x \leq 1 / 0 \leq x \leq 3) &= \frac{P(-1 \leq x \leq 1)}{P(0 \leq x \leq 3)} = \frac{\Phi\left(\frac{-1-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{2}\right)}{0.5328} \\ &= \frac{0.1498}{0.5328} = 0.2811 \end{aligned} \quad (c)$$

مثال (6-8) : إذا كان لدينا المتغير العشوائي  $X$  الذي يتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي  $\mu = 300$  وانحرافه المعياري  $\sigma = 10$  أوجد قيم التوابت  $a$ ،  $b$  بحيث يحقق العلاقة  $P(a < x < b) = 0.90$  وبحيث يكون متمثل حول الوسط الحسابي.

الحل : لنأخذ  $b = \mu + k$  ،  $a = \mu - k$  وعليه فإن :

$$P(a < x < b) = P(\mu - k < x < \mu + k) = P(300 - k < x < 300 + k)$$

$$= \Phi\left(\frac{300 + k - 300}{10}\right) - \Phi\left(\frac{300 - k - 300}{10}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{k}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-k}{10}\right) = 2\Phi\left(\frac{k}{10}\right) - 1 = 0.90$$

$$= 2\Phi\left(\frac{k}{10}\right) = 1 + 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k}{10}\right) = \frac{1.9}{2} = 0.95$$

$$k = 16.5$$

$$a = \mu - k = 300 - 16.5 = 283.2$$

$$b = \mu + k = 300 + 16.5 = 316.5$$

نظرية دموفر - لابلاس :

إذا أخذنا بعين الاعتبار المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين فإنه كلما كبرت قيمة  $n$  فإن التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بحيث أن  $\mu = nP$  ،  $\sigma^2 = nP(1-P)$  على النحو التالي :

$$P(x = x) = \binom{n}{x} \cdot P^x (1-P)^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi nP(1-P)}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-nP}{\sqrt{nP(1-P)}} \right)^2} \quad \dots(6-20)$$

ومن العلاقة (6-20) فإن توزيع المتغير العشوائي  $X$  الذي يتبع توزيع ذات الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي  $N(nP, nP(1-P))$  وبالأستفادة من العلاقة (6-20) نصل إلى أن :

$$P(X \geq x) = F(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{x-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right) \quad \dots\dots(6-21)$$

وتسمى النتيجة (6-20) لتوزيع ذات الحدين بأنها تقريب دموفر - لابلاس. ويستخدم هذا التقريب في الحياة العملية بشكل متكرر ولإيجاد الاحتمالات التي تخضع لتوزيع ذات الحدين نستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي.

ومن 6-21 فإن :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \sum_{x=x_1}^{x_2} \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{x_2 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)$$

مثال (9-6) : ألقى حجر نرد 2000 مرة إذا كانت  $x$  تمثل عدد مرات ظهور الرقم 2 على الوجه العلوي . أوجد  $P(|x - 300| < 10)$ .

الحل : إن معالم المتغير العشوائي  $X$  هي  $P = \frac{1}{6}$  ،  $n = 2000$  وتتبع توزيع ذات الحدين

والقيمة المتوقعة لهذا التوزيع  $\mu = n.P = 2000 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1000}{3}$  وأما التباين لهذا التوزيع

$$\sigma^2 = nP(1-P) = 2000 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10000}{36}$$

فإن  $n$  عند كبير جدا فإن :

$P(|x-300|<10) = P(300 - 10 < x < 300 + 10) = P(290 < x < 310)$   
ولحساب الاحتمال المطلوب نستفيد من جدول التوزيع الطبيعي القياسي وذلك بعد تحويل القيم العادية إلى قيم قياسية :

$$\begin{aligned} P(290 < x < 310) &= \Phi\left(\frac{310 - \frac{2000}{6}}{\sqrt{2000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{290 - \frac{2000}{6}}{\sqrt{2000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) \\ &= \Phi(2.6) - \Phi(1.4) = 0.995 - 0.919 = 0.076 \end{aligned}$$

### 6-2-2: التوزيع المنتظم Uniform Distribution:

إذا كان  $X$  متغير عشوائي منتهي يأخذ القيم  $x_1, x_2, \dots, x_n$  واحتمالاتها  $P(x=x_1), \dots, P(x=x_n)$  فإن الدالة الاحتمالية لهذا المتغير :

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

ويقال للعلاقة (6-22) بدالة الاحتمالي المنتظم.

ولنوسع التعريف أعلاه ليشمل المتغير المتصل فإذا كان مجال التعريف للمتغير العشوائي المتصل منتهي وكانت  $a \leq x \leq b$  فإن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل  $X$  هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

ونستطيع توضيح بأن  $\int_a^b f(x)dx = 1$  كما يلي.

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a} (b-a) = 1$$

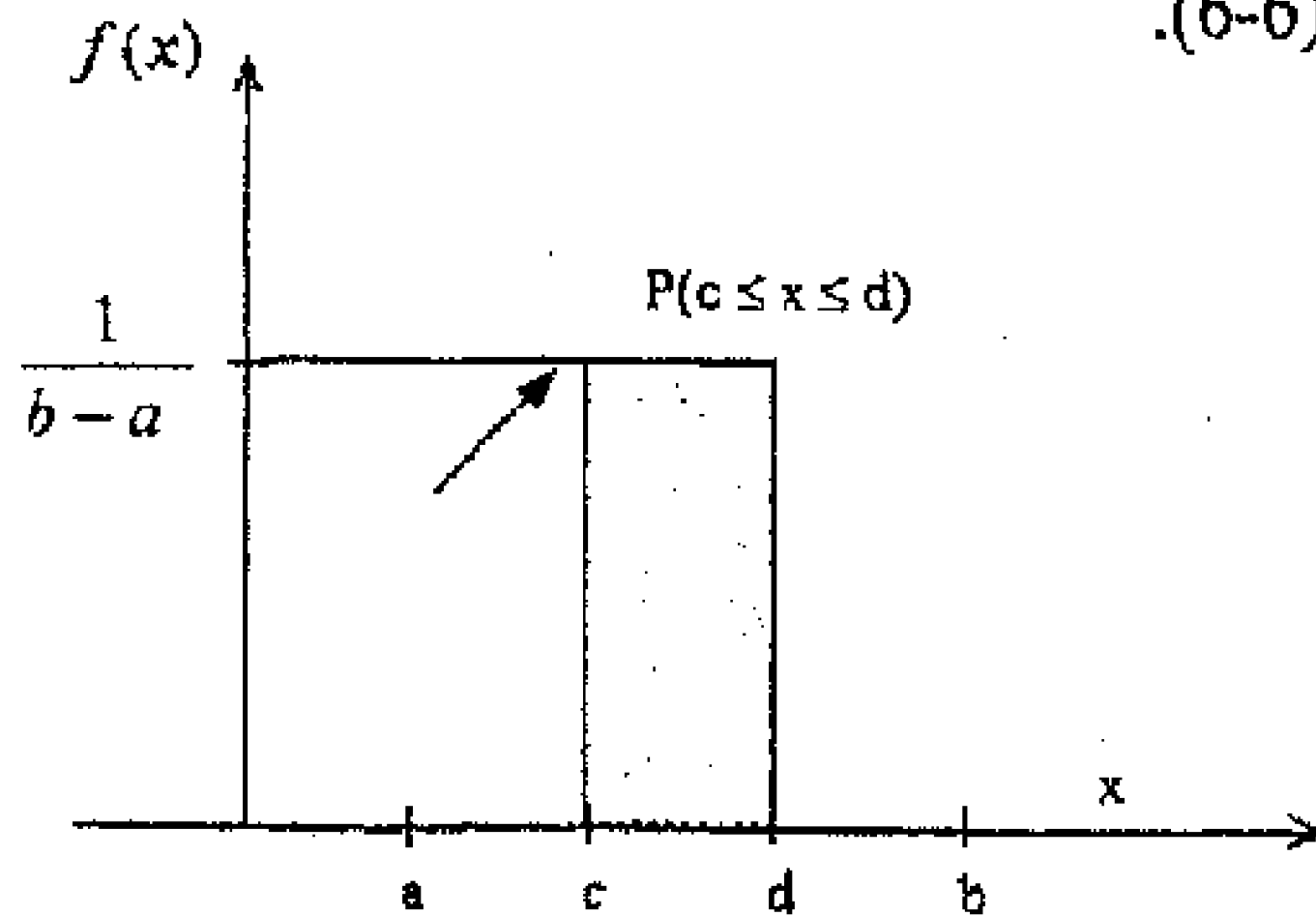
أما دالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  فهي :

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

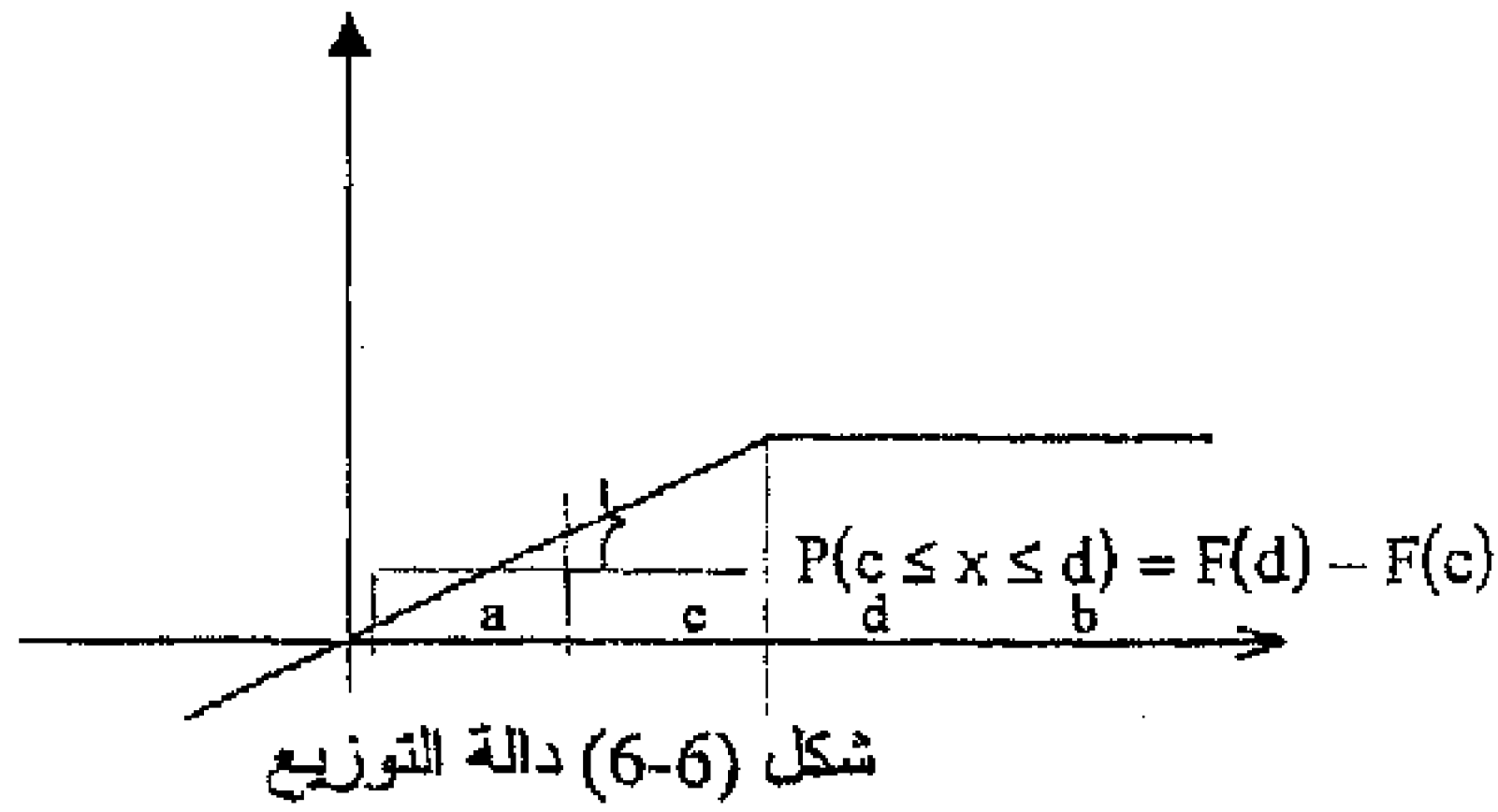
وعليه فإننا نكتب دالة التوزيع بالصورة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , x \geq b \end{cases} \quad \dots\dots (6-24)$$

وبيان العلاقة (6-23) موضح بالشكل (6-5) بينما العلاقة (6-24) موضحة بالشكل (6-6).



شكل (6-5) دالة الاحتمال  $f(x)$



ودالة العزم المولد لهذا التوزيع.

$$Mx(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

وبأخذ المشتقة الأولى والتعويض عن  $t=0$  نحصل على القيمة المتوقعة

$$E(x) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{وأما التباين}$$

**مثال (6-10) :** قطار يصل إلى المحطة الساعة الحادي عشر فإذا كان وقت وصول القطار يتبع التوزيع المنتظم وكان المتغير العشوائي  $X$  يأخذ قيم بين 10,55 - 11,10 أوجد احتمال أن يصل القطار بعد ثلاثة دقائق على الأكثر من الوقت المحدد حسب برنامج القطار.

**الحل :** نكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير على النحو التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} & , \quad 10.55 < x < 11.3 \\ 0 & , \quad \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

### 6-2-3: التوزيع الاسي Exponential Distribution :

إن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي  $X$  هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6-25)$$

$\lambda < 0$  معلمة.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} dx = 1 \quad \text{ونستطيع توضيح أن}$$

ودالة التوزيع للمتغير العشوائي  $X$  هي :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-t/\lambda} dt = 1 - e^{-x/\lambda}$$

وعليه يمكن صياغة دالة التوزيع بالعلاقة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-x/\lambda} & , x > 0 \\ 1 & , x \rightarrow \infty \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6-26)$$

ومن العلاقة (6-26) فإن :

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = e^{-x/\lambda}$$

والقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي  $X$  هي :

$$M_x(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} dx$$

ونستخدم التحويل التالي  $U = \left(\frac{1}{\lambda} - t\right)x$

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-(1-\lambda t)x/\lambda} dx \\ &= \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - t} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - t} = (1 - \lambda t)^{-1} \end{aligned}$$

ومن هنا فإن القيمة المتوقعة  $E(X) = \lambda$

وتباين التوزيع  $V(X) = \lambda^2$

نظرية (6-2) : لكل قيم  $s, t > 0$  ، فإن :

$$P[(x > s + t) / (x > s)] = P(x > t)$$

البرهان : من تعريف الاحتمال المشروط فإن :

$$\begin{aligned} P[(x > s + t) / (x > s)] &= \frac{P(x > s + t)}{P(x > s)} \\ &= \frac{1 - P(x \leq s + t)}{1 - P(x \leq s)} = \frac{e^{-(s+t)/\lambda}}{e^{-s/\lambda}} \\ &= e^{-t/\lambda} = P(x > t) \end{aligned}$$

#### 6-2-4: توزيع جاما Gamma Distribution

قبل الخوض في توزيع جاما لنعرف أولاً ماذا نعني بالدالة جاما والتي سنرمز لها بالرمز  $\Gamma$  وهي على النحو التالي :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx, \quad n > 0$$

وباستخدام التكامل بالأجزاء وذلك بفرض أن :

$$\begin{aligned} \int e^{-x} dx &= \int dv = & U &= x^{n-1} \\ -e^{-x} &= v & dU &= (n-1)x^{n-2} \end{aligned}$$

$$\Gamma(n) = e^{-x} \cdot x^{n-1} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n-1)x^{n-2} \cdot e^{-x} dx = (n-1) \Gamma(n-1)$$

فإذا كان  $n$  عدد صحيح موجب فإن :

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1)(n-2) \Gamma(n-2) = \dots \\ &= (n-1)(n-2) \dots \Gamma(1) \end{aligned}$$

ولكون  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$  فإنه يمكن كتابة  $\Gamma(n) = (n-1)!$  وكذلك يمكن كتابة

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} dx = \sqrt{\pi}$  وذلك من تعريف دالة  $\Gamma$ . ويمكن كتابة دالة الكثافة

الاحتمالية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع جاما على الصورة :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x/\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6-27)$$

وهنا  $n$ ,  $\lambda$  معلمات للتوزيع  $\Gamma$ , وإذا كان  $n$  عدد صحيح موجب :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!\lambda^n} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x/\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (6-28)$$

وعندما تكون  $n = 1$  فإن توزيع جاما يتحول إلى التوزيع الأسّي ويصبح بالصورة :

$$f(x) = \frac{1}{0!\lambda} \cdot x \cdot e^{-x/\lambda}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

والآن نجد دالة العزم المولد لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير  $X$  :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-x/\lambda} \cdot dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-(1-\lambda t)x/\lambda} \cdot dx. \end{aligned}$$

ولكون  $t < \frac{1}{\lambda}$  فإن التكامل أعلاه تقاربي. وإذا أجرينا التحويل التالي :

$$x = \frac{\lambda}{1-\lambda t} y \rightarrow dx = \frac{\lambda}{1-\lambda t} dy$$

وبالتعويض في أعلاه فإن :

$$\begin{aligned} M_x(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \int_0^{+\infty} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda t} \right)^{n-1} y^{n-1} \cdot e^{-y} \frac{\lambda}{1-\lambda t} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda t} \right)^n \int_0^{+\infty} y^{n-1} \cdot e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\lambda^n} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda t} \right)^n \Gamma(n) = \left( \frac{1}{1-\lambda t} \right)^n = (1-\lambda t)^{-n} \end{aligned}$$

وإذا أخذت المشتقة بالنسبة لـ  $t$  ثم إيجاد قيمة المشتقة الأولى عندما  $t=0$  فإنه ينتج الوسط الحسابي  $\mu$ .

$$\begin{aligned} M'_x(t) &= (-\lambda)(-n)(1-\lambda t)^{-n-1} \\ &= \lambda n (1-\lambda t)^{-n-1} \end{aligned}$$

$$\mu = M'_x(0) = \lambda n = E(x)$$

وبالمثل نجد أن تباين المتغير العشوائي :

$$V(x) = \lambda^2 n$$

ولإيجاد دالة لتوزيع للمتغير العشوائي  $X$  فإن.

$$F(x) = 1 - P(X > x)$$

$$= 1 - \int_x^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!\lambda^n} t^{n-1} \cdot e^{-t/\lambda} dt$$

وإذا عمل التحويل التالي :

$$\frac{1}{\lambda}t = u \Rightarrow t = \lambda u \Rightarrow dt = \lambda du \text{ ويصبح}$$

$$F(x) = 1 - \int_{t/\lambda}^{+\infty} \frac{U^{n-1} \cdot e^{-U}}{(n-1)!} du$$

### 6-2-5 : توزيع بيتا Beta Distribution

إذا كان المتغير العشوائي  $X$  يتبع توزيع بيتا وعلى اعتبار أن  $\alpha > 0, \beta > 0$  ، فإن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & \text{قيم } x \text{ الأخرى} \end{cases} \quad \dots (6-29)$$

وبالتالي فإن الدالة الاحتمالية لتوزيع بيتا هو :

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \quad \dots (6-30)$$

ومن العلاقة (6-30) نجد أن :

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = 1$$

ويقال لتكامل العلاقة (6-30) بأنه دالة بيتا ويرمز له بالرمز  $B(\alpha, \beta)$  وعليه فإن دالة بيتا تصبح على النحو :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

وباستخدام هذه الدالة فإننا نجد الوسط الحسابي والتباين للمتغير العشوائي  $X$  الذي يتبع توزيع بيتا ومن تعريف للقيمة المتوقعة.

$$E(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^1 \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 1) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \alpha \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \Rightarrow E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

مع ملاحظة أن  $\Gamma(\alpha + \beta + 1) = (\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta), \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  ولحساب التباين للمتغير العشوائي  $X$  نجد أولاً  $E(x^2)$  :

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \int_0^1 x^2 \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
\text{ومن} \quad &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + 2) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \cdot \frac{(\alpha + 1)(\alpha) \Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + \beta)} \\
&= \frac{(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}
\end{aligned}$$

علاقة التباين :

$$\begin{aligned}
V(x) &= E(x)^2 - \mu^2 \\
&= \frac{(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)} - \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \\
&= \frac{(\alpha^2 + \alpha)(\alpha + \beta) - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta - \alpha^3 - \alpha^3\beta - \alpha^2}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta + 1)^2} \\
V(x) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}
\end{aligned}$$

### 6-2-6: توزيع كوشي Cauchy Distribution :

إن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كوشي هو :

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty$$

ودالة التوزيع لهذا المتغير :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \arctan x + \frac{\pi}{2} \right) & , \quad -\infty < x < +\infty \\ 0 & , \quad x \rightarrow -\infty \\ 1 & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{1 \times 1}{\pi(1+x^2)} dx \quad \text{ولهذا التوزيع فإن}$$

$$= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \log(a^2 + 1) \right] = +\infty. \quad \text{ولا تبين.}$$

## تمارين الفصل السادس

- (1) على اعتبار أن  $n$  عدد صحيح وكانت  $P = \frac{1}{2}$  وكان  $P\left(x; 2n, \frac{1}{2}\right) = P\left(x; n, \frac{1}{2}\right)$  توزيعين لذات الحدين قارن  $P(x = x)$  لكلا التوزيعين.
- (2) غرفة بها 200 مستقبل لأجهزة الراديو منها 15 جهاز تألف سحب من هذه الأجهزة 20 جهازا وكان السحب دون الإعادة وإذا كان  $x$  يمثل عدد الأجهزة التألفة في العينة وعلى اعتبار أن  $x$  متغير عشوائي والمطلوب إيجاد :  
 (a)  $P(3 \leq x \leq 7)$  (b)  $P(x \geq 1)$
- (3) يلقي من كيس به 20 قطعة نقود على منضدة. احسب احتمال أن يكون عدد الكتابات العدد 6 فأكثر.
- (4) يلقي حجر فرد  $2n$  مرة احسب احتمال أن يظهر الرقم 1 على الوجه العلوي من مرة ثم باستخدام قانون ستيرلنج لتثبت أن القيمة التقريبية لهذا الاحتمالي هو  $\frac{5}{\sqrt{\pi n}}$ .
- (5) إذا كانت معلمات توزيع ذات الحدين هي  $n = 15, P = \frac{1}{3}$  أوجد قيمة  $x$  التي تجعل الاحتمالي  $P(x = x)$  أكبر ما يمكن.
- (6) إذا كان المتغير العشوائي  $x$  يتبع بواسون وكان  $P(x=0)=0.4$  احسب  $P(x>2)$ .
- (7) أوجد قيمة  $x$  التي تحقق  $P(x = x) = P(x = x-1)$  في توزيع ذات الحدين  $b(x; n, P)$ .
- (8) تلقي قطعة نقود لحين ظهور أربع صور (علما بأنه يتوقف إلقاء قطعة نقود وحينما تظهر الصورة الأربعة وإذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد الرميات فأوجد الاحتمال  $P[(2 \leq x \leq 5)(x \geq 3)]$ .
- (9) ألقيت قطعة نقود لحين الحصول على 20 كتابة احسب احتمال الحصول على كتابة في الرمية السابعة.
- (10) في اختبار يحتوي على عشرة أسئلة وكل سؤال صحيح يعطى درجة 10، ... ، 2، 1، 0 وإذا كان معدل العلاقات هو  $\mu = 6.7$  وتتوزع هذه الإجابات توزيعا طبيعيا وعلى اعتبار أن  $P(x > 8) = 0.10$  احسب ما يلي :  
 (a) أوجد  $P(x \leq 7)$ .  
 (b) أعلى علامة حصل عليها طالب من بين 15% من الحاصلين على أخفض العلامات.
- (11) إذا كان  $x$  متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي وإذا كان احتمال أن تكون قيمة المتغير العشوائي أقل من 50 هو 0.1 وأكبر من 100 هو 0.05. احسب ما يلي :  
 (a) احسب احتمال  $P(x > 70)$ .  
 (b) احسب احتمال  $P[(x \leq 70) / (60 \leq x \leq 80)]$ .  
 (c) احسب قيمة  $\alpha$  التي تحقق  $P(x > 4) = 0.15$ .

(12) إذا كان  $x$  متغير عشوائي وتوزيعه الاحتمالي  $N(2, 9)$ . أوجد قيمة  $a$  التي تحققها المساواة التالية  $2P(x \leq a) = 1 - 3P(x > a)$ .

(13) إذا كان لدينا للمتغير العشوائي المتصل  $x$  يتبع التوزيع الأسّي وكان  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50}$  وإذا كان  $Y = 2x + 1$  فأوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا للتوزيع ودالة التوزيع له.

(14) إذا كان المتغير العشوائي  $x$  يمثل العمر الزمني لمصباح كهربائي ينتج من قبل ماكينة وكان هذا المتغير يتبع التوزيع الأسّي وكان  $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1000}$  والمطلوب :

(a) حساب  $P(1 \leq x \leq 1500)$  (b) القيمة المتوقعة  $E(x/x \leq 5)$ .

(c) دالة التوزيع الشرطي  $F(x/x \leq 5)$ .

(15) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل معطاة بالشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} & , -\alpha \leq x \leq \alpha \\ 0 & , \text{لقيم } x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

أوجد قيم  $\alpha > 0$  التي تحققها المساواة  $P(|x| \leq 1) = P(|x| > 1)$

(16) إذا كان احتمال النجاح في تجربة ما هو 75، وأجريت التجربة 1000 فما احتمال أن نحصل على نجاح في الفترة  $1000P - 40 \leq x \leq 1600P + 40$

(17) إذا كان المتغير العشوائي  $x$  يخضع التوزيع المنتظم المتصل وكان  $a = 40$ ،  $b = 60$  والمطلوب : دالة التوزيع الشرطية.

(a) بالاستفادة من دالة التوزيع احسب  $F(x/x \leq 20)$ .

(b) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية  $f(x/x \leq 20)$ .



## الفصل السابع

### تقدير الفترات





# الفصل السابع

## تقدير الفترات

### 7-1 : فترات الثقة :

**تعريف (7-1) :** إذا كان أحد ثلاث نقاط على الأقل هي متغير عشوائي فإنه يقال لمثل هذه الفترات بفترات الثقة.

وبدلاً من أن نجد تقدير نقطي لمعلمة المجتمع  $\theta$  سنجد حدود عليا وحدود سفلى وسنجعل هذه الحدود من متغيرات عشوائية بحيث أن معلمة المجتمع تقع ضمن الحدين وبما أننا نعرف احتمال وقوع  $\theta$  ضمن حدود وهذا يعني أننا نعمل على تقدير الفترة المعنية وبما أن حدود فترة الثقة هي عبارة عن متغيرات عشوائية فإن فترة الثقة متغير عشوائي أيضاً وعليه فإن احتمال وقوع  $\theta$  ضمن الفترة المطلوبة أو ضمن حدود الثقة باحتمال  $1-\alpha$  يمكن تعريفه على الصورة التالية :

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha \quad , \quad \hat{\theta}_2 > \hat{\theta}_1 \quad \dots\dots\dots (7-1)$$

وأما طول فترة الثقة فهي  $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$  وكلما كان طول فترة الثقة صغير فإن التقدير يعتمد عليه. وإذا أعطي التقدير النقطي وتقدير الفترة معا فإنه يمكن فهم التقدير النقطي بشكل أفضل. وسنتناول الخطوات المتبعة للتقدير لفترة وهي :

(1) تحديد المعلمة المراد إجراء عملية تقدير لها مثال ذلك  $\mu$ .

(2) تحديد المقدّر المستخدم لهذه العملية مثل  $\bar{x}$ .

(3) كتابة توزيع العينة للمقدّر ومعرفة معالمه.

(4) تحديد دالة التقدير.

(5) إيجاد مستوى الثقة الذي يحدده الباحث.

(6) الحسابات والنتيجة والقرار. وسنبدأ بفترة ثقة الوسط الحسابي.

### 7-2 : فترات الثقة لوسط التوزيع الطبيعي :

إذا أخذت عينة عشوائية بحجم  $n$  من توزيع طبيعي فإن الوسط الحسابي للعينة لا يتوقع أن يساوي الوسط الحسابي للمجتمع لذا فإنه لا بد من وجود علاقة تربط هذين الوسطين ويمكن تعريف هذه العلاقة معتمدة على الاحتمال ولكون توزيع العينة مأخوذ من التوزيع الطبيعي

لذا فإن توزيعه يتمثل بـ  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  ولكونه يتمتع بهذا التوزيع فإنه يمكن كتابة العلاقة التالية.

7-2-1 : إذا كان حجم العينة كبيراً أي  $n \geq 30$

$$P\left(Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \dots\dots\dots (7-2)$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة بـ  $\sigma / \sqrt{n}$  نحصل على :

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < +Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \dots\dots\dots (7-3)$$

نطرح  $\bar{X}$  من جميع الأطراف لنحصل على

$$P\left(-\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

وهنا أيضاً طرح كمية من جميع أطراف المتباينة لا يغير من إشارة التباين تضرب جميع أطراف المتباينة في (-1) وهذا يغير من إشارة التباين وبعد إعادة ترتيب المتباينة ينتج :

$$P\left(-\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \dots\dots\dots (7-3)$$

مثال (7-1) : في مسألة تقدير متوسط عمر مصباح كهربائي من إنتاج مصنع من خلال معطيات عينة عشوائية حجمها 100 مصباح حسب الوسط الحسابي  $\bar{X} = 501.2$  ساعة وعلى افتراض أن تباين المجتمع معروف ( $\sigma^2 = 16$ ) أوجد فترة الثقة لمتوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع باحتمال 95 %.

الحل : نحدد المعطيات في المسألة.

المعلمة المراد إيجاد فترة الثقة لها هي  $\mu$ .

المقدر  $\bar{X} = 501.2$  ,  $n = 100$  ,  $\sigma = 4$  ,  $\sigma^2 = 16$  والاحتمال 95% نجد قيمة  $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$  ثم بتطبيق العلاقة (7-3) لينتج.

$$P\left[501.2 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{100}} < \mu < 501.2 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{100}}\right] = 0.95$$

$$P[501.2 - 0.784 < \mu < 501.2 + 0.784] = 0.95$$

$$P[500.416 < \mu < 501.984] = 0.95$$

مثال (7-2) : من مجتمع وسطه الحسابي غير معلوم وتباينه 22,5 سحبت عينة حجمها  $n = 64$  بطريقة عشوائية وحسبت القيم التالية لهذه العينة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{64} x_i}{64} = 7, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{64} (x_i - \bar{x})^2}{64} = 315$$

والمطلوب :

(a) فترة الثقة للوسط الحسابي  $\mu$  باحتمال 90 %.

(b) أوجد فترة الثقة باحتمال 90 % إذا علم أن الحد الأدنى لهذه الفترة 3,

الحل : بتطبيق الخطوات السابقة نحدد المعطيات أولاً.

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.95} = 1.65$  ,  $n = 64$  ,  $S = 15$  ,  $\bar{X} = 7$  وبتطبيق العلاقة :

$$P\left[7 - 1.65\left(\frac{15}{8}\right) < \mu < 7 + 1.65\left(\frac{15}{8}\right)\right] = 0.90$$

$$\Rightarrow P[3.91 < \mu < 10.09] = 0.90$$

(b) لكون الحد الأدنى لفترة الثقة هي 3.5 وبتطبيق الحد الأدنى لفترة الثقة :

$$3.5 = \bar{x} - Z_1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow 3.5 = 7 - Z_1 \cdot \frac{15}{8}$$

$$\Rightarrow Z_1 = 1.86$$

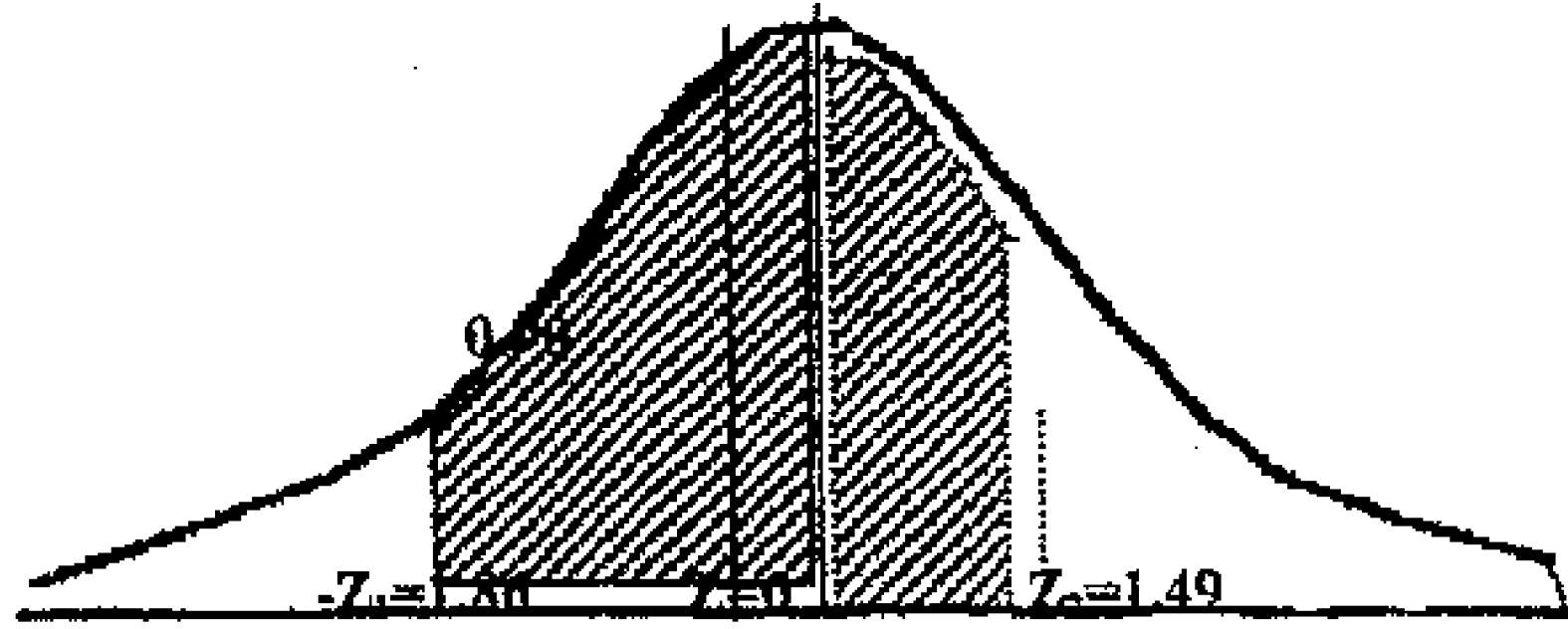
وحسب هذه النتيجة فإن  $P(Z < 1.86) = 0.9686$  ,  $P(Z > 1.86) = 0.0314$  وهذا واضح

في شكل (7-1) وقد وجدت هذه القيم من جدول  $Z$  وبشكل خاص فإن  $P(Z < Z_2) = 0.9314$  نجد أن  $Z_2 = 1.49$  وعليه فالفترة المطلوبة :

$$P\left(3.5 < \mu < \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.90$$

$$\Rightarrow P\left[3.5 < \mu < 7 + 1.49\left(\frac{15}{8}\right)\right] = 0.90$$

$$\Rightarrow P[3.5 < \mu < 9.79] = 0.90$$



شكل (7-1)

7-2-2 : إيجاد فترة الثقة للوسط الحسابي لـ  $\mu$  إذا كان حجم العينة صغيراً أو التباين غير معلوم.

في حالة عدم معلومية  $\sigma^2$  وأردنا تقدير فترة للوسط الحسابي  $\mu$  باحتمال  $1-\alpha$  فإن العينة التي حجمها  $n$  والمسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً فإن هذه العينة تتوزع توزيع  $t$

بدرجة حرية  $n-1$  وعليه فإن المتغير العشوائي  $t = \frac{(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}}{S}$  يقع بين

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  و  $-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$  باحتمال  $1-\alpha$  ويمكن كتابة العلاقة التالية :

$$P\left[-t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} < \frac{\bar{X} - \mu}{S\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] = 1 - \alpha \quad \dots\dots (7-5)$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في  $\frac{S}{\sqrt{n}}$  نحصل على :

$$P\left[-\left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < \left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

ب طرح  $\bar{X}$  من جميع أطراف المتباينة وترتيب المتباينة ينتج :

$$P\left[\bar{X} - \left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \frac{S}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + \left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$

ضرب جميع أطراف المتباينة في 1- لينتج العلاقة :

$$P\left[\bar{x} - \left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + \left[t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}\right] \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \quad \dots (7-6)$$

مثال (7-2) : أخذت عينة من مجتمع طلابي لمدرسة ما فوجد أن متوسط أوزان 25 طالبا هو 45 كغم وكان الانحراف المعياري للأوزان هو 4 والمطلوب :

(a) إيجاد فترة ثقة للمتوسط الحسابي  $\mu$  باحتمال 95%.

(b) إيجاد فترة ثقة للمتوسط باحتمال 99%.

الحل : درجة الحرية  $n - 1 = 25 - 1 = 24$

(a) نجد  $t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} = t(0.025)(24) = 2.064$  وبتطبيق العلاقة نجد أن :

$$P\left[45 - 2.064 \times \frac{4}{\sqrt{25}} < \mu < 45 + 2.064 \times \frac{4}{\sqrt{25}}\right] = 0.95$$

$$P[45 - 2.064 \times 0.8 < \mu < 45 + 2.064 \times 0.8] = 0.95$$

$$P[45 - 1.6512 < \mu < 45 + 1.6512] = 0.95$$

$$P[43.3488 < \mu < 46.6512] = 0.95$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة هي [43.3488 , 46.6512]

(b) نجد قيمة  $t$  الجدولية أي  $t[0.005, 24] = 2.797$

ثم نطبق العلاقة أعلاه لنحصل

$$P[45 - 2.797 \times 0.8 < \mu < 45 + 2.797 \times 0.8] = 0.99$$

$$P[45 - 2.2376 < \mu < 45 + 2.2376] = 0.99$$

$$P[42.7624 < \mu < 47.2376] = 0.99$$

وتكون الفترة المطلوبة [42.7624 , 47.2376] 7-3 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين :

7-3-1 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين إذا كان حجم العينة كبيراً.

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة  $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$  لتصبح العلاقة :

$$P \left[ -Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2) < Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

ب طرح  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$  من كل طرف من أطراف المتباينة لتصبح العلاقة

$$P \left[ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < -(\mu_1 - \mu_2) < -(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

بضرب جميع الأطراف في 1- ثم إعادة الترتيب لنحصل على العلاقة التالي:

$$P \left[ (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < -(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad \dots (7-7)$$

مثال (7-3) : إذا كانت نتائج امتحان الكيمياء الذي أجري لـ 50 طالبة ، 75 طالبا هي كما يلي :

$$\bar{x}_1 = 76 \quad , \quad \sigma_1 = 6 \quad , \quad n_1 = 50$$

$$\bar{x}_2 = 82 \quad , \quad \sigma_2 = 8 \quad , \quad n_2 = 75$$

والمطلوب إيجاد فترة ثقة للفرق بين متوسطي الطالبات والطلاب لهذا المجتمع باحتمال 96%.

الحل : بتطبيق العلاقة (7-7).

$$P \left[ -(76 - 82) - 2.06 \sqrt{\frac{36}{50} + \frac{64}{75}} < \mu_1 - \mu_2 < (76 - 82) + 2.06 \sqrt{\frac{36}{50} + \frac{64}{75}} \right] = 0.96$$

$$P \left[ -6 - 2.06 \times 1.25 < \mu_1 - \mu_2 < -6 + 2.06 \times 1.25 \right] = 0.96$$

$$P \left[ -6 - 2.575 < \mu_1 - \mu_2 < -6 + 2.575 \right] = 0.96$$

$$P \left[ -8.575 < \mu_1 - \mu_2 < -3.425 \right] = 0.96$$

∴ الفترة المطلوبة هي  $[-8.575, -3.425]$ .

7-3-2 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطين إذا كان حجم العينة صغيراً.

لتكوين فترة الثقة المطلوبة نبدأ بتقدير فترة الثقة وذلك بفرض أن :

$$P \left[ -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2\right)} < t < t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1 + n_2 - 2\right)} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} \right] = 1 - \alpha$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في المقدار  $S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$  لتصبح المتباينة

$$P \left[ -t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) < t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

وبطرح  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$  من جميع الأطراف لتصبح العلاقة :

$$P \left[ -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < -(\mu_1 - \mu_2) < -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

ثم نضرب جميع أطراف المتباينة في 1- وإعادة الترتيب ينتج :

$$P \left[ -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < -(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\left(\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right)} S_a \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

مع ملاحظة أن  $S_a^2$  هو التباين التجميعي والذي يوجد من العلاقة التالية :

$$S_a^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \quad \dots\dots\dots (7-9)$$

وإن  $S_a = \sqrt{S_a^2}$  حيث أن  $S_a$  هو الانحراف المعياري التجميعي.

مثال (7-4) : تعطى مادة الإحصاء في كلية ما من قبل مدرسين اثنين A, B وفي نهاية الفصل كانت النتائج المتحصلة على الشكل التالي :

$$A: \bar{X}_1 = 72 \quad , \quad S_1 = 5 \quad , \quad n_1 = 14$$

$$B: \bar{X}_2 = 75 \quad , \quad S_2 = 6 \quad , \quad n_2 = 12$$

والمطلوب : إيجاد فترة ثقة للفرق بين المتوسطين باحتمال 98 %.

الحل : نجد أولاً التباين التجميعي من العلاقة (7-9).

$$\begin{aligned} S_a^2 &= \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{25(14 - 1) + 36(12 - 1)}{12 + 14 - 2} \\ &= \frac{25 \times 13 + 36 \times 11}{24} = \frac{721}{24} = 30.04 \end{aligned}$$

$$S_a = \sqrt{30.04} = 5.48$$

ثم نجد  $t_{(0.01, 24)} = 2.485$   
ولإيجاد فترة الثقة نطبق العلاقة (7-8).

$$P\left[(72 - 75) - 2.485 \times 5.48 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{12}} < \mu_1 - \mu_2 < (72 - 75) + 2.485 \times 5.48 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{12}}\right] = 0.98$$

$$P[-3 - 2.485 \times 5.48 \times 0.475 < \mu_1 - \mu_2 < -3 + 2.485 \times 5.48 \times 0.475] = 0.98$$

$$P[-9.468 < \mu_1 - \mu_2 < 3.468] = 0.98$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة هي  $[-9.468, 3.468]$ .

#### 7-4 : تكوين فترة الثقة للنسبة :

سوف نرمز لمقدر النسبة  $\hat{P}$  حيث أن  $\hat{P} = \frac{x}{n}$  وعليه فإن توزيع العينة مأخوذ من مجتمع

توزيع طبيعي  $N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\right)$  أي أن وسطه الحسابي  $P$  وتباينه  $\frac{P(1-P)}{n}$ .

وأن دالة التقدير  $Z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$  ولإيجاد فترة الثقة المطلوبة يفترض أن

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ثم نعوض عن  $Z$  بالقيمة أعلاه.

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

نضرب جميع الأطراف بالمقدار  $\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$  لنحصل على المتباينة

$$P\left[-Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < \hat{P} - P < Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] = 1 - \alpha$$

ب طرح  $\hat{P}$  من جميع أطراف المتباينة لنحصل على المتباينة.

$$P\left[-\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < -P < -\hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right] = 1 - \alpha$$



ضرب جميع أطراف المتباينة في 1- مع إعادة الترتيب لنحصل على المتباينة.

$$P \left[ +\hat{P} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} < P < \hat{P} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right] = 1 - \alpha \quad \dots (7-10)$$

مثال (7-5) : أخذت عينة مؤلفة من 500 أسرة في أحد المدن، فوجد أن 160 أسرة تمتلك جهاز فيديو والمطلوب تكوين فترة الثقة 95% لنسبة مالكي جهاز الفيديو في هذه المدينة.

الحل: نجد أولاً المعطيات  $x = 160$ ,  $n = 500$ ,  $1 - \alpha = 95\%$ ,  $\hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{160}{500}$  أي

$\hat{P} = 0.32$  ثم نجد قيمة  $z = 0.975$  من الجدول وهي 1.96.

وبتطبيق العلاقة أعلاه نجد أن :

$$P \left[ +0.32 - 1.96 \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}} < P < 0.32 + 1.96 \sqrt{\frac{(0.32)(0.68)}{500}} \right] = 0.95$$

$$P[0.28 < P < 0.36] = 0.95$$

وعليه فإن الفترة المطلوبة [0.28, 0.36].

7-5 : إيجاد فترة الثقة للفرق بين نسبتين :

ننطلق من العلاقة :

$-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$  وبالتعويض عن  $Z$  لنحصل على المتباينة :

$$P \left[ -Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha$$

بضرب جميع أطراف المتباينة في  $\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$  لنحصل على المتباينة التالية

:

$$P \left[ -Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} < (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2) < Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

ب طرح  $(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)$  من جميع أطراف المتباينة لنحصل على المتباينة التالية :

$$P \left[ -(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} < -(P_1 - P_2) < -(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \right] = 1 - \alpha$$

وبضرب جميع أطراف المتباينة في 1- ثم إعادة الترتيب لنحصل على المتباينة التالية :

$$P \left[ (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} < P_1 - P_2 < (\hat{P}_1 - \hat{P}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad \dots\dots (7-11)$$

#### 7-6 إيجاد فترة الثقة للتباينات :

لنأخذ العينة ذات الحجم  $n$  من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً والمطلوب إيجاد فترة الثقة لتباين المجتمع  $\sigma^2$  بمستوى ثقة  $1 - \alpha$  بالاستفادة من كون أن المتغير العشوائي  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  وبدرجة حرية  $n-1$  يتوزع توزيع كاي تربيع فإننا نجد هذه الفترة فإذا افترضنا بدأ ذي بادي أن المتغير العشوائي يقع بين  $X_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2, X_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2$  باحتمال  $1 - \alpha$ .

$$P \left[ X_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < X_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2 \right] = 1 - \alpha \quad \dots\dots (7-12)$$

وبضرب جميع الأطراف للمتباينة بـ  $\frac{1}{(n-1)S^2}$  ثم أخذ المقلوب وإعادة الترتيب

لنحصل على :

$$P \left[ \frac{(n-1)S^2}{X_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{X_{1-\frac{\alpha}{2}, (n-1)}^2} \right] = 1 - \alpha \quad \dots\dots (7-13)$$

وإذا ما أردنا إيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري  $\sigma$  فإننا نأخذ الجذر التربيعي لجميع أطراف المتباينة.

مثال (6-7) : من مجتمع مجهول الوسط الحسابي والتباين أخذت عينة بطريقة عشوائية حجمها  $n = 36$  ومن هذه العينات وجدت البيانات التالية:

$$\bar{x} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} x_i = 5 \quad , \quad A = \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2 = 560$$

المطلوب : إيجاد فترة ثقة للتباين  $\sigma^2$  باحتمال 90%.

الحل : باستخدام العلاقة أعلاه.

$$P \left[ \frac{560}{X_{(0.05), 35}^2} < \sigma^2 < \frac{560}{X_{(0.95), 35}^2} \right] = 0.90$$

أو  $P(12.79 < \sigma^2 < 30.28) = 0.90$  وحدة هي الفترة المطلوبة.



# الفصل الثامن

## اختبار الفرضيات



# الفصل الثامن

## اختبار الفرضيات

### مقدمة :

نظراً لأهمية هذا الفصل الذي يساعد في اتخاذ القرارات لذا سنولي أهمية خاصة وسنعطي المفاهيم بمزيد من الأمثلة.

**تعريف (1-8):** الفرضية عبارة عن مقولة أو طرح يصاغ حول معلومة معينة ونطرح للاختبار فإما أن تقبل أو ترفض وبناء على هذه النتيجة للاختبار يصاغ إلى اتخاذ قرار موضوعي من صلب البيانات المتوفرة في عينة ما.

وهناك نوعان من الفرضيات يكمل كل منهما الآخر ويطلق على الأولى الفرضية العدمية وسنرمز لها بالرمز  $H_0$  بينما الفرضية المكملية هي الفرضية البديلة وسنرمز لها بالرمز  $H_1$  وكلا الفرضيتين معا تشكلان فضاء الاختبار فعند قبول أحد الفرضيتين نكون قد رفضنا الفرضية البديلة ضمناً فإذا قبلنا الفرضية  $H_0$  فمعنى ذلك نكون قد رفضنا  $H_1$  والعكس صحيح وفي هذه الحالة يبرز لدينا نوعين من الخطأ

- (1) خطأ من النوع الأول : وهو عبارة عن رفض فرضية صحيحة.
- (2) خطأ من النوع الثاني : وهو حادث قبول فرضية خاطئة. وعلى ذلك يكون احتمال رفض فرضية  $H_0$  علماً بأنها صحيحة أي :  
(رفض  $H_0/H_0$  صحيحة)  $\alpha = P$  ويطلق على  $\alpha$  اسم مستوى المعنوية ، وعلى غرار ذلك فإن

ح (قبول  $H_0/H_0$  خاطئة)  $\beta = P$  وهذا هو احتمال الخطأ من النوع الثاني. وهدفنا دائماً هو أن لا نقع في أي من الخطأين أو التقليل من ذلك ولعمل ذلك نزيد حجم العينة الذي يقلل من الوقوع  $\alpha$  ،  $\beta$  في آن واحد.

## الاختبارات الإحصائية :

### 8-1 : اختبار العلاقة بين متوسط عينة ومتوسط مجتمع :

8-1-1: في حالة معلومية الانحراف المعياري  $\sigma$  للمجتمع وحجم العينة كبيراً. إذا أردنا دراسة أو اختبار العلاقة بين متوسط عينة  $\bar{X}$  ومتوسط مجتمع  $\mu$  لمعرفة ما إذا كان الفرق معنوياً أي  $(\bar{X} - \mu)$  أو غير معنوي بدرجة ثقة معينة فتتبع الخطوات التالية:

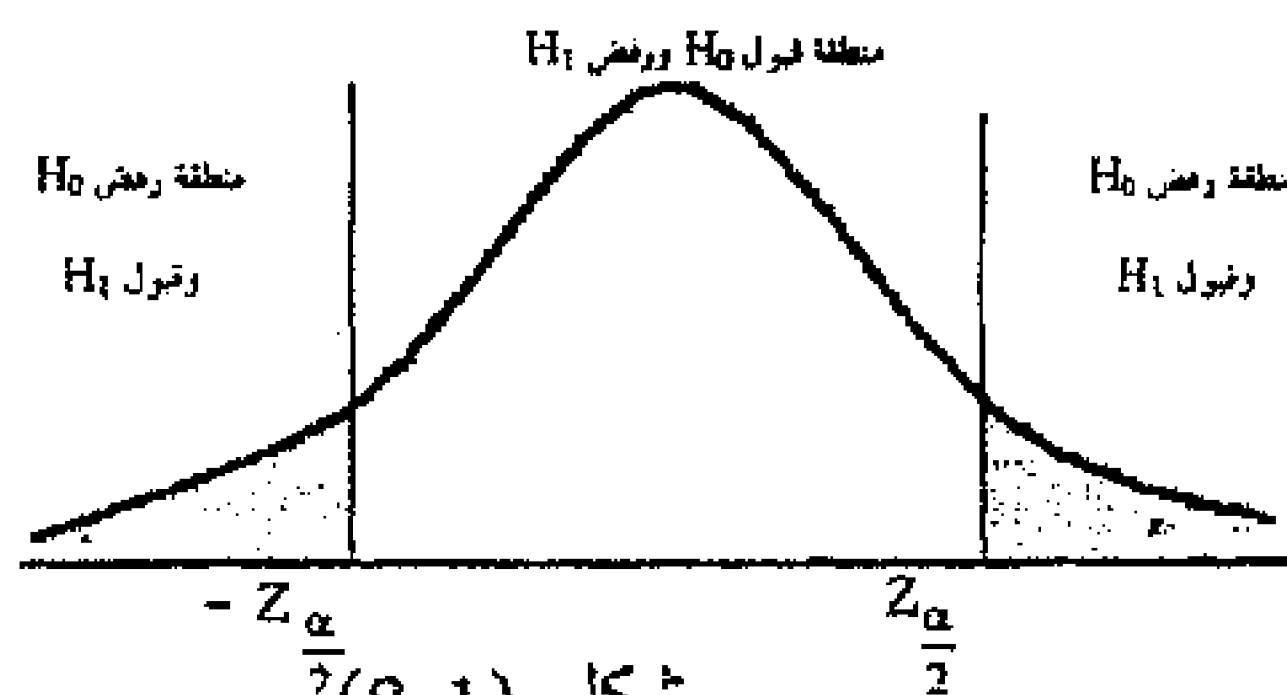
- تحديد درجة الثقة ومستوى المعنوية فإذا كانت درجة الثقة  $(1-\alpha) = 95\%$  فإن  $\alpha = 0.05$  حيث  $\alpha$  مستوى المعنوية. فتكون قيمة  $Z$  الجدولية 1.96 وإذا كانت درجة الثقة  $1-\alpha = 0.99$  فإن مستوى المعنوية  $\alpha = 0.01$  وعليه فإن  $\frac{\alpha}{2} = 0.005, Z_{\frac{\alpha}{2}} = 3$

- تحديد الفرض ومنطقة كل فرض وهذه الفروض هي :  
(1) فرض العدم  $H_0$  ومعناه عدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين وعليه فإن العينة تنتمي إلى المجتمع  $\mu$  ونكتب  $N(\mu, \sigma^2)$  وتكون منطقة قبول الفرض  $H_0: \mu = \mu_1$  هي المنطقة المحددة بـ  $-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}$  حيث  $\alpha = 0.05$  أو  $\alpha = 0.01$ .  
(2) الفرض البديل  $(H_1)$  ومعناه عدم وجود فرق معنوي بين المتوسطين أي أن  $\bar{X} - \mu$  مهم.

وهناك تظهر أمامنا ثلاثة بدائل في الفرض البديل  $H_1$  :

(a) إذا كان  $H_0: \mu = \mu_1$  وكان  $H_1: \mu \neq \mu_1$

فإننا نرفض  $H_0$  إذا كانت  $\left| Z_{\text{حسب}} \right| > \left| Z_{\frac{\alpha}{2}} \right|$  كما هو واضح في شكل (8-1)



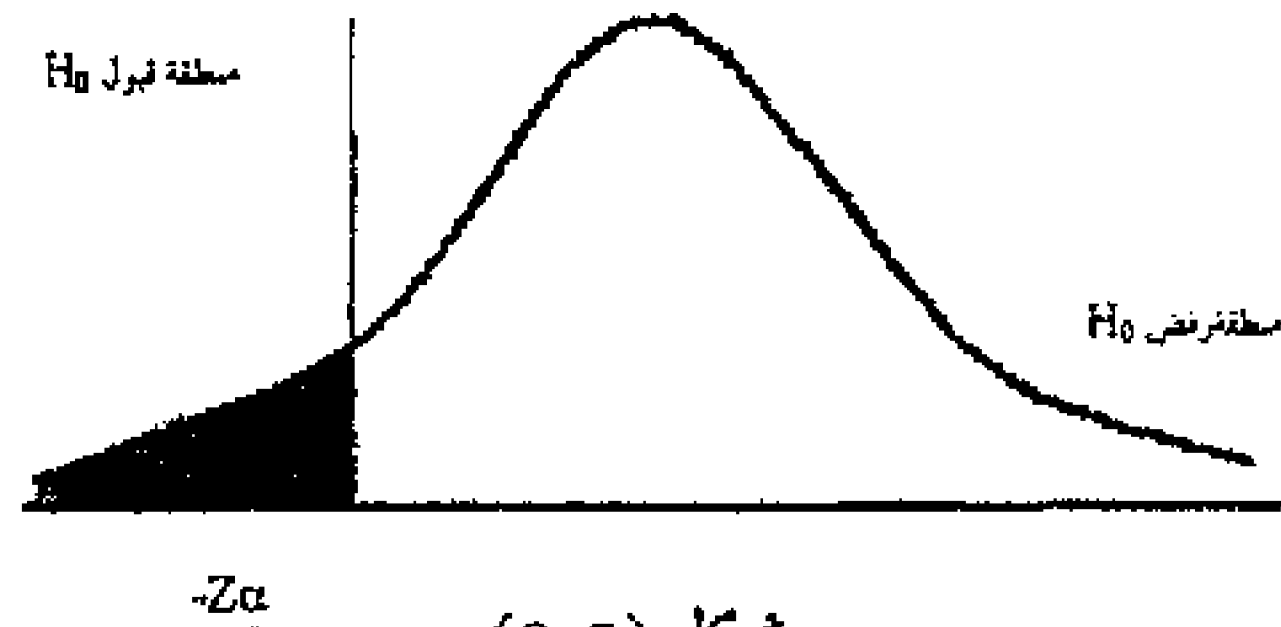
شكل (8-1)

والمقصود هنا بـ  $Z$  المحسوبة هي دالة الاختبار  $Z$  ويمكن إيجادها من العلاقة التالية:



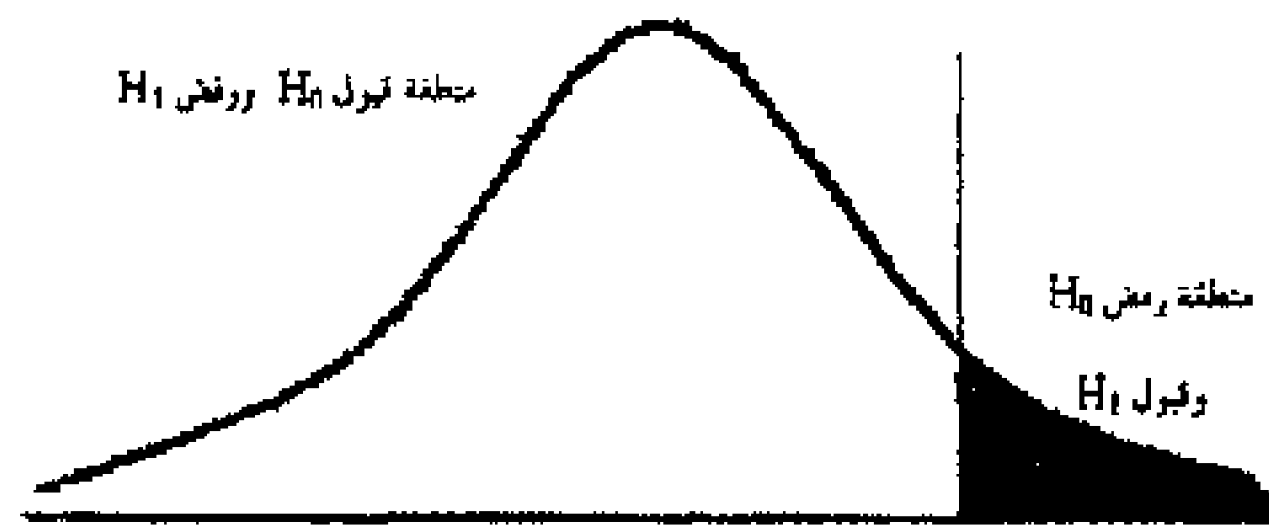
$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

(b) إذا كان  $H_0: \mu = \mu_1$  وكان  $H_1: \mu \leq \mu_1$  فإننا نرفض  $H_0$  إذا كانت الجدولية  $-Z_{\alpha} > Z_{\text{المحسوبة}}$  كما في شكل (8-2)



شكل (8-2)

(c) إذا كان  $H_0: \mu = \mu_1$  وكان  $H_1: \mu \geq \mu_1$  فإننا نرفض  $H_0$  إذا كانت الجدولية  $Z_{\alpha} > Z_{\text{المحسوبة}}$  كما في الشكل (8-3)



شكل (8-3)  $Z_{\alpha}$

مثال (8-3): أخذت عينة بطريقة عشوائية من 100 كيس إسمنت من مصنع الإسمنت ووجد أن متوسط وزن كيس الإسمنت 49.5 فهل يمكن أن نستنتج أن متوسط هذه العينة تتماشى مع المتوسط العام لوزن الكيس وهو 50 كغم إذا علم أن الانحراف المعياري  $\sigma = 5$  بدرجة ثقة 95%.

الحل : بإتباع الخطوات السابقة نبدأ بتكوين الفرضيات.

$$4) Z_{المحسوبة} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0.2}{\frac{0.5}{10}} = \frac{0.2}{0.05} = -4$$

نلاحظ أن  $Z_{المحسوبة}$  وقعت في المنطقة الحرجة وهي منطقة رفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.01$ .

8-1-2: اختبار الوسط الحسابي لتوزيع  $N(\mu, \sigma^2)$  ، مجهولة وحجم العينة صغير.

نظرية (8-1) : إذا كانت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  قيم مشاهدات العينة العشوائية مأخوذة من توزيع طبيعي وكانت  $\sigma^2$  غير معلومة فإننا نستخدم قيمة دلالة

$$الاختبار T حيث : T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

وإذا كانت  $H_0: \mu = \mu_1$  فهناك ثلاث بدائل للفرضية البديلة  $H_1$ .

(a) فإذا كانت  $H_1: \mu \neq \mu_1$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  عندما

الجدولية  $T_{[1-\alpha, n-1]} < T_{المحسوبة} < T_{الجدولية}$  ونرفضها إذا كان  $|Z| > |Z_{الجدولية}|$ .

(b) أما إذا كانت  $H_1: \mu < \mu_1$  فإننا نرفض  $H_0$  إذا كانت

$$الجدولية < -T_{[1-\alpha, n-1]} < T_{المحسوبة}$$

(c) وإذا كانت  $H_1: \mu > \mu_1$  نرفض  $H_0$  إذا كانت

$$T_{المحسوبة} > T_{[1-\alpha, n-1]}$$

مثال (8-4) : أخذت عينة عشوائية حجمها 25 مفردة ومن توزيع طبيعي

$N(\mu, \sigma^2)$  وكانت  $\sigma^2$  مجهولة وأردنا أن نختبر  $H_0$  حيث  $\mu = 66$  مقابل

$H_1: \mu > 55$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.01$   $T_{(24, 1-0.01)} = 1.341$ .

الحل : نجد أولاً الجدولية حيث  $T(24, 1-0.01) = 1.341$

$$ثم نجد T_{المحسوبة} = \frac{60 - 55}{\frac{0.6}{\sqrt{25}}} = \frac{5}{0.6} = 8.33$$

وبالمقارنة مع الجدولية  $T$  وبما أن  $T_{المحسوبة} < T_{الجدولية}$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى  $\alpha = 0.01$ .

2 - 8: اختبار الفرضيات للفرق بين الوسطين مع معلومية  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ .

يمكن توضيح اختبار الفرضيات للفرق بين وسطين من خلال اعطاء النظرية التالية.

نظرية (8-2) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها  $n_1$  ووسطها الحسابي  $\bar{x}_1$  تتوزع توزيعاً طبيعياً  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ثم أخذت عينة عشوائية حجمها  $n_2$  ووسطها الحسابي  $\bar{x}_2$  من توزيع طبيعي  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  مستقل عن الأول وكانت  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  معلومتين وأردنا اختبار  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  أو  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  مقابل الفرضية البديلة  $H_1$ .  
(a) إذا كانت  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كانت:  
الجدولية  $|Z| > Z_{\alpha/2}$ .

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

حيث :

(b) إذا كانت  $H_1: \mu_1 < \mu_2$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كانت  
الجدولية  $Z < -Z_{\alpha}$

(c) إذا كانت  $H_1: \mu_1 > \mu_2$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كانت  
الجدولية  $Z > Z_{\alpha}$ .

مثال (8-5): لدينا نوعين من السجاير وحسبنا متوسط النيكوتين في السجاير فوجد في النوع الأول  $\bar{X}_1 = 24.1$  ملم عندما كان حجم العينة 40 سيجارة والتباين  $\sigma_1^2 = 1.44$  فيما وجد في النوع الثاني  $\bar{X}_2 = 23.8$  عندما كان حجم العينة 50 سيجارة والتباين  $\sigma_2^2 = 1.96$  وأردنا اختباره  $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$  مقابل  $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$ .

الحل : نجد أولاً المحسوبة  $Z$  من العلاقة .

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(24.1 - 23.8) - 0}{\sqrt{\frac{1.44}{40} + \frac{1.96}{50}}} \quad \text{نجد}$$

$$= \frac{0.3}{0.87} = 0.36$$

ثم نجد الجدولية  $Z_{0.95} = 1.64$  حيث  $Z < Z_{0.95}$  لذا نقبل  $H_0$  ونرفض  $H_1$ .  
بما أن الجدولية  $Z < Z_{\alpha}$  المحسوبة  $Z$  لذا نقبل  $H_0$  ونرفض  $H_1$ .

8-3 : اختبار الفرضيات للفرق بين وسطين إذا كان  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ومجهولان.

نظرية (8-3) : إذا كانت قيم المشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عينة عشوائية من توزيع طبيعي  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  وكانت المشاهدات  $y_1, y_2, \dots, y_n$  عينة عشوائية من توزيع  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  مستقل عن التوزيع الأول وكان  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  مجهولان وأردنا اختبار  $H_0: \mu_1 - \mu_2$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  مقابل :

(a)  $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$  وفي هذه الحالة فإننا نقبل  $H_0$  إذا كانت :

$$-T_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right]} < \frac{\bar{x} - \bar{y}}{Sp \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < T_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right]}$$

حيث أن  $T_{\text{المحسوبة}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{Sa \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$  وأن :

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2) - 2} \quad (\text{التباين التجميعي}).$$

(b) وإذا كان  $H_1: \mu_1 > \mu_2$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كانت  $T_{\text{المحسوبة}} > T_{\left[1-\alpha, n_1+n_2-2\right]}$ .

مثال (8-6) : عينتان عشوائيتان من توزيعين مستقلين  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  ،  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  وكانت  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ومجهولتان ووجد أن حجم العينة الأولى  $n_1 = 64$  وحجم العينة الثانية  $n_2 = 64$  وكان الوسط الحسابي للعينة الأولى 16 وكان الوسط الحسابي للعينة الثانية 20 وكان  $S_1^2 = 9$  بينما  $S_2^2 = 16$ . والمطلوب اختبار الفرضية  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  مقابل.

(a)  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  (b)  $H_1: \mu_1 > \mu_2$  (c)  $H_1: \mu_1 < \mu_2$  ،  $\alpha = 0.05$

الحل : قبل البدء بالاختبار نحدد أولا المعطيات والمتطلبات في المسألة.

$$n_1 = 64 , n_2 = 49 , \bar{x}_1 = 16 , \bar{x}_2 = 20 , S_1^2 = 9 , S_2^2 = 16$$

$$S_p^2 = \frac{S_1^2(n_1 - 1) + S_2^2(n_2 - 1)}{(n_1 + n_2) - 2} = \frac{9(64 - 1) + 16(49 - 1)}{64 + 49 - 2} \quad \text{ثم نجد}$$

$$S_p^2 = \frac{9(63) + (16)(48)}{111} = \frac{567 + 768}{111} \\ = \frac{1335}{111} = 12.03 \Rightarrow S_p = \sqrt{12.03} = 3.47$$

ثم نجد المحسوبة T من العلاقة :

$$T_{\text{المحسوبة}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{16 - 20}{3.47 \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{49}}} = \frac{-4}{3.47 \sqrt{0.02 + 0.02}} \\ = \frac{-4}{3.47 \sqrt{0.04}} = \frac{-4}{0.694} = -5.76$$

$$T_{\left[1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2\right]} = T_{[0.975, 111]} = 1.99 \quad \text{نجد}$$

$$T_{[1-\alpha, n_1+n_2-2]} = T_{[0.95, 111]} = 1.663 \quad \text{ونجد}$$

وبعد إعداد هذه البيانات نبدأ بالإجابة على أجزاء السؤال.

(a) عندما يكون  $H_0: \mu_1 \neq \mu_2$  وبما أن  $-5.7 < -1.99$  ,  $-5.76 < 1.99$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$ .

(b) وعندما  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  وبما أن

$$-5.76 < 1.663 \Rightarrow T_{\text{المحسوبة}} < T_{\text{الجدولية}}$$

فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$ .

(c) وعندما يكون  $H_1: \mu_1 < \mu_2$  وبما أن :

$$T \neq -T_{[1-\alpha, n_1+n_2-2]} \Rightarrow -5.76 \neq -1.663$$

فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$ .

#### 8-4 : اختبار الفرضيات للنسبة :

إن اختبارات الفرضيات التي لها علاقة بالنسب مطلوبة في عدة مجالات فعادة يهتم السياسيون بمعرفة نسب الناخبين الذين سيصوتون معهم في الانتخابات القادمة وكذلك يهتم الصناعيون بمعرفة نسب التالف في إنتاجهم وهكذا وسنعتبر مسألة اختبار الفرضيات في نسبة النجاح في تجربة ذات الحدين مساوية لـ  $H_0: P \neq P_0$  حيث أن ؛ هي نسبة النجاح وستكون الفرضية المقابلة أما  $H_1: P \neq P_0$  أو  $H_1: P > P_0$  أو  $H_1: P < P_0$  والآن نورد النظرية التالية :

نظرية ( 8-4 ) : إذا كانت قيم المشاهدات التالية  $x_1, x_2, \dots, x_n$  لعينة عشوائية تخضع لتوزيع ذات الحدين  $(x, n, p)$  وكانت حجمها كبير وأردنا اختبار  $H_0: P = P_0$  مقابل.

(a) إذا كانت  $H_1: P \neq P_0$  فإننا نقبل  $H_0$  إذا كانت المحسوبة  $Z$  تقع على النحو :

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < Z_{\text{محسوبة}} = \frac{P - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

(b) وإذا كانت الفرضية البديلة  $H_1: P > P_0$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  عندما تكون

$$Z_{\text{محسوبة}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

(c) أما إذا كانت الفرضية البديلة  $H_1: P < P_0$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  عندما تكون

$$Z_{\text{محسوبة}} > -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

مثال ( 8- 8 ) : يدعى صياد بأنه يصيب 75% من الطيور التي يطلق عليها النار فهل توافق هذا الادعاء. إذا كان في يوم ما قد أسقط 80 طيرا من أصل 120 طيرا أطلق عليها النار مستخدما  $\alpha = 0.05$ .

الحل : نحدد المعطيات في السؤال :

(a)  $H_0: P = 0.75$  (b)  $H_1: P \neq 0.75$  (c) ثم نجد  $\alpha = 0.67$ .

نجد أولا المحسوبة  $Z$  من العلاقة التالية :

$$Z_{\text{محسوبة}} = \frac{0.67 - 0.75}{\sqrt{\frac{(0.75)(0.25)}{120}}} = \frac{-0.18}{\sqrt{0.00156}} = \frac{0.18}{0.04} = 4.5$$

نجد  $Z_{0.975} = 1.96$

بما أن  $|Z_{\text{محسوبة}}| \neq 1.96$  لذا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$  أي أننا لا نوافق الادعاء.

## 8-5 : اختبار الفرضيات للفرق بين نسبتيين :

نظرية ( 8- 5 ) : إذا كانت قيم المشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  عينة عشوائية من توزيع ذات الحدين  $(x, n_1, P_1)$  وكانت قيم المشاهدات  $y_1, y_2, \dots, y_n$  من

توزيع ذات الحدين  $b(x, n_2, P_2)$  وكانت العينتان مستقلتان عن بعضهما البعض وكانت  $n_1, n_2$  كبيرتين وأردنا اختبار  $H_0: P_1 - P_2 = 0$  مقابل

(a) إذا كانت  $H_1: P_1 \neq P_2$  أو  $H_1: P_1 - P_2 \neq 0$  فإننا نقبل  $H_0$  إذا كان  $|Z| > Z_{\text{جدولية}}$ .

$$\text{حيث } Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\frac{P(1-P_1)}{n_1} + \frac{P(1-P_2)}{n_2}}}$$

$$P = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2} \text{ ونرفضه عكس ذلك.}$$

(b) إذا كانت  $H_1: P_1 > P_2$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$  إذا كانت  $Z > Z_{\text{جدولية}}$ .

(c) إذا كانت  $H_1: P_1 < P_2$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$  إذا كانت  $Z < -Z_{\text{جدولية}}$ .

مثال (8-9) : شركة لإنتاج التبغ توزع نوعين من التبغ ووجد من بين 200 مدخن وجد أن 56 يدخنون أو يفضلون النوع I وأن من بين 150 مدخن وجد أن 29 يدخنون النوع II فهل تستطيع أن تستنتج أن النوع I أكثر رواجاً من النوع II ؟

الحل : نبدأ بتلخيص المعطيات :

$$n_1 = 200, n_2 = 150, P_1 = \frac{56}{200} = 0.28, P_2 = \frac{29}{150} = 0.19$$

$$P = \frac{n_1 \cdot P_1 + n_2 \cdot P_2}{n_1 + n_2} = \frac{(200)(0.28) + (150)(0.19)}{350} = \frac{56 + 28.5}{350}$$

$$= \frac{84.5}{350} = 0.24$$

نجد المحسوبة  $Z$  من العلاقة :

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{0.28 - 0.19}{\sqrt{\frac{(0.24)(0.72)}{200} + \frac{(0.24)(0.76)}{150}}} = \frac{0.09}{\sqrt{\frac{0.1728}{200} + \frac{0.1824}{150}}}$$

$$Z_{\text{المحسوبة}} = \frac{0.09}{\sqrt{0.000864 + 0.001216}} = \frac{0.09}{\sqrt{0.00208}} = \frac{0.09}{0.0456} = \frac{9}{5} = 1.8$$

ثم نجد  $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$  أي  $Z_{0.95}$  نريد اختبار  $H_0: P_1 - P_2 = 0$  مقابل  $H_1: P_1 - P_2 > 0$  بما أن  $H_1: P_1 > P_2$  أحادية  $Z$  فإنا نرفض  $H_0$  ونقبل  $H_1$  أي أن النوع I أكثر رواجاً من النوع II.

#### 8-6 : اختبار الفرضيات للتباين :

يعتبر اختبار الفرضيات للتباين من أهم الاختبارات وسنتناول اختبار التباين المساوي لقيمة معينة وكذلك الفرق بين تباينين.

##### 8-6-1 : اختبار التباين المساوي لقيمة معينة :

نظرية ( 8-6 ) : إذا أخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي  $N(\mu, \sigma^2)$  وأردنا اختبار  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$  فإننا نقبل  $H_0$  إذا تحققت المتباينة التالية :

$$\frac{(n-1).S^2}{X^2_{[1-\frac{\alpha}{2}, n-1]}} < \sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{X^2_{[\frac{\alpha}{2}, n-1]}}$$

(b) وإذا كانت الفرضية البديلة  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كان  $\sigma^2 > \frac{(n-1).S^2}{X^2_{[1-\alpha, n-1]}}$ .

(c) أما إذا كانت الفرضية البديلة  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$  فإننا نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  إذا كان  $\sigma^2 < \frac{(n-1).S^2}{X^2_{[1-\alpha, n-1]}}$ .

مثال ( 8-10 ) : مصنع لبطاريات السيارات يدعي أن عمر البطارية لها انحراف معياري 0.9 سنة وأخذت عينة حجمها 10 بطاريات من هذه البطاريات ووجد أن الانحراف المعياري لها 1.2 سنة فهل تعتقد أن  $\sigma > 0.9$  مستخدماً مستوى معنوية 0.05.

الحل : نحدد المعطيات  $n=10$  ,  $S=1.2$  ,  $S^2=1.44$  ,  $\sigma=0.9$  ,  $\sigma^2=0.81$  ثم نجد قيمة  $X^2_{[0.95, 9]}$  ثم نكون الفرضية  $H_0: \sigma^2 = 0.81$  مقابل  $H_1: \sigma^2 > 0.81$  وبتطبيق العلاقة أعلاه.



$$\frac{S^2(n-1)}{X^2_{[1-\alpha, n-1]}} = \frac{9(1.44)}{16.92} = 0.76$$

بما أن  $0.76 < 0.81$   $\therefore$  نقبل  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha$  ونستنتج أنه لا يوجد سبب للشك بأن الانحراف المعياري  $= 0.9$

8-6-2: اختبار الفرق بين تباينين:

نظرية (8-7): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها  $n_1$  من توزيع طبيعي  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  وأخذت عينة أخرى حجمها  $n_2$  من توزيع طبيعي  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  وأردنا اختبار  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  مقابل  $H_1$  فإننا نقبل  $H_0$  في الحالات التالية:  
(A) إذا كان  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$   $H_1$  وكان

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Rightarrow F < f_{1-\alpha}[(n_1-1)(n_2-1)]$$

(B) إذا كان  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$   $H_1$  وكان

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Rightarrow F > f_{1-\alpha}[(n_1-1)(n_2-1)]$$

(C) إذا كان  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$   $H_1$  كان

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \Rightarrow F > f_{1-\frac{\alpha}{2}}[(n_1-1)(n_2-1)], F > f_{\frac{\alpha}{2}}[(n_1-1)(n_2-1)]$$



## الفصل التاسع

### تحليل التباين



## الفصل التاسع

### تحليل التباين

#### 9-1 مقدمة :

لنفترض أننا بصدد تحليل إنتاج ثلاثة أنواع مختلفة من القمح مزروعة في ثلاثة قطع معينة لهذا الغرض نهتم باختبار الفرضية (العدمية) بأن الأنواع الثلاثة تنتج بالمعدل مقادير متساوية من القمح، واختبار ما إذا كان نوعين معينين من هذه الأنواع الثلاثة مختلفين بدرجة ثقة معينة نستطيع ذلك باختبار الفرضية بشكلها البسيط (الفرق بين متوسط الإنتاج في النوعين = صفر، مقابل  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  أما اختبار تساوي عدة متوسطات معا فهناك طريقة تسمى تحليل التباين).

وطريقة تحليل التباين هذه هي طريقة لفصل الاختلاف الكلي (Total Variation) للمعطيات إلى أجزاء ومكونات تقيس مختلف مصادر هذا الاختلاف بشكل قابل للتعليل والربط بالسببية وفي تجربتنا في المثال الأنف الذكر نحصل على مكونين (احداثيين) Components.

- الأول يقيس الاختلاف الذي يعود إلى خطأ التجربة Experimental Error.
- والثاني ناتج عن خطأ التجربة مضافا إليه الاختلاف الناجم عن الاختلاف بين نوعية القمح أنفسهما.

فإذا كانت الفرضية ( $H_0$ ) صحيحة بمعنى أنه كل من النوعيات الثلاثة لها في المعدل إنتاج متشابه فإن أي من مقياسي الاختلاف السابقين هو مقياس منفصل لتبني واحد وهو الاختلاف الناجم عن خطأ التجربة، وعلى هذا فإننا نعتمد في اختبارنا على إيجاد مقارنة بين هذين المكونين بواسطة اختبار  $F$ .

وقد يعود الاختلاف المذكور إلى تفاوت في خشونة قطع الأرض المزروعة ولكننا بتخطيط محدد يمكننا التغلب على هذا النوع، باختبار قطع أرض متجانسة لإجراء التجربة وتعميم التجربة بشكل متكرر وعشوائي، أما في حالة الفشل في التغلب على هذا العامل ألهم من عوامل الخطأ قد يقودنا ذلك إلى تقدير مبالغ فيه لخطأ التجربة وهذا يقودنا بالنتيجة إلى زيادة احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني.

وقد نستعمل في التجربة السابقة عاملا آخر هو التسميد، فيكون لدينا ثلاثة أنواع من القمح وثلاثة أنواع سماد مختلفة. عندها فإننا نواجه، اختبار فرضية ما إذا كان الاختلاف يعود إلى أنواع القمح، أم إلى أنواع السماد أو إلى كلاهما معا.

وفي هذه الحالة فإن تحليل التباين يمكننا من الحصول على طريقة لتقسيم الاختلاف الكلي (Total Variation) إلى ثلاث مكونات (احداثيات).

- الأول : يقيس خطأ التجربة فقط.
- الثاني : يقيس خطأ التجربة مضافا إلى الاختلاف الناجم عن تعدد أجناس القمح.

- الثالث : يقيس خطأ التجربة مضافا إلى الاختلاف الناجم عن تعدد أنواع السماد.

وعلى هذا فإن مقارنة المكون الثاني مع المكون الأول يقودنا إلى اختبار فرضية ما إذا كانت أنواع القمح المختلفة لها نفس الإنتاج بالمتوسط ومقارنة المكون الثالث مع المكون الأول يقودنا إلى اختبار فرضية عدم وجود اختلاف في الإنتاج باستعمال أنواع مختلفة من السماد.

- ويرى تصنيف المشاهدات بناء على عامل (Creterion) منفرد كما في تصنيف الإنتاج

حسب نوع القمح يدعى تصنيف باتجاه واحد One-Way-Classification.

- أما إذا كانت المشاهدات مصنفة حسب عاملين كما في تصنيف الإنتاج حسب نوع القمح

ونوع السماد يدعى تصنيف باتجاهين Tow-Way-Classification.

ويمكن الاستطراد في التصنيف حسب عوامل عديدة، وهذا يسمى التصنيف متعدد الاتجاهات

Multi-Way-Classification. والآن سنتناول كل طريقة على انفراد.

## 9-2 : التصنيف الأحادي One-Way-Classification :

إذا اعتبرت عينات حجم كل منها من مجتمعات عددها  $n$  على فرض أن هذه المجتمعات مستقلة وموزعة توزيعا معتادا المتوسطات  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  ولها نفس التباين نريد اختبار الفرضية  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  مقابل الفرضية البديلة وهي على الأقل اثنين من هذه المتوسطات غير متساو أي  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 = \dots = \mu_k$  والنوع  $X_{ij}$  يعبر عن الملاحظة التي ترتيبها  $i$  من المجتمع الذي رقمه  $j$  كما في الجدول (9-1).

المجتمعات العينات	1	2	3	.....	i	.....	n
1	$X_{11}$	$X_{12}$	.....				$X_{1n}$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	.....				$X_{2n}$
...							
i	$X_{i1}$	$X_{i2}$	.....				$X_{in}$
...							
K	$X_{k1}$	$X_{k2}$	.....				$X_{kn}$
	$T_1$	$T_2$	.....				$T_n$
	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	.....				$\bar{X}_n$

جدول (9-1)

وكما هو مبين في الجدول (9-1) فإن  $T_j$ : هو تجميع لكل المشاهدات في المجتمع الذي رقمه  $j$ ،  $\bar{X}_j$  هو متوسط كل المشاهدات في العينة المأخوذة من المجتمع  $j$  :  $T$  هو مجموع المجاميع كلها في  $n \times k$  من المشاهدات.

المشاهدات وأن أي من هذه المشاهدات يمكن كتابتها كما يلي :

$$X_{ij} = \mu_x + S_{ij}$$

حيث  $S_{ij}$  تقيس انحراف الملاحظة التي رقمها (I) عن وسط المجتمع المقابل أو :

$$\mu_x = \mu + \alpha_j$$

حيث أن  $\mu$  هي بالتعريف تساوي متوسط جميع المشاهدات يعني :

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j}{n}$$

وعليه فإننا نستطيع كتابة  $X_{ij} = \mu + \alpha_j + S_{ij}$

وبما أن  $\alpha_j = 0$  فإننا نسمي  $\alpha$  بأثر المجتمع

ويمكن أن نعبر عن الفرضية الصفرية والفرضية البديلة على النحو التالي :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  مقابل  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 = \dots = \mu_k$  وكذلك بالنسبة للصنف.

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k$  مقابل  $H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \dots = \alpha_k$

$H_1$  على الأقل واحدة من  $\alpha$  لا تساوي الصفر.

ويعتمد الاختبار على مقارنة مقدرين مستقلين لتباين المجتمع  $\sigma^2$  وهذان المقدران يمكن حسابهما بتقسيم إمكانية الاختلاف Variability للمعطيات إلى مكونين ويكون تبايننا لمشاهدات المرتبة في عينة حجمها  $nk$  هو :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2}{nk - 1}$$

وإشارة التجميع المزدوج تعني أننا نجمع مربعات فروق القيم باعتبار ز يتغير  $1, 2, \dots, n$  وكذلك تتغير قيمة لكل من قيم  $\alpha$  الذي يتغير من  $n-1$  ويسمى البسط لقيمة  $S^2$  مجموع المربعات الكلي أي SST.

والذي يقيس الاختلاف الكلي للمعطيات ويمكن تقسيمه كما يلي :

نظرية (9-1) : إن مجموع مربعات (9-3) يمكن تقسيمها إلى قسمين على النحو :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + n \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

وهنا  $\bar{X}_i$  تعني الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الذي ترتبه  $i$  يعني

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

الإثبات : في العلاقة (9-3) فإن مجموع المربعات يمكن كتابته على النحو :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [(x_{ij} - \bar{x}_i) + (\bar{x}_i - \bar{x})]^2$$

وبفك القوس أعلاه وتوزيع رمز المجموع ينتج أن :

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \left[ (\bar{x}_i - \bar{x}) \sum_{j=1}^n (\bar{x}_i - \bar{x}_i) \right] + n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 + n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

ولكون  $\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)$  لكل قيم  $i$  وبهذه النتيجة يتم إثبات النظرية ويمثل الطرف الأيسر من

المساواة في نظرية (9-1) مجموع المربعات الكلي والذي سنرمز له بالرمز SST. والحد الأول من الطرف الأيمن يمثل مجموع مربعات الخطأ والذي سنرمز له بالرمز S.S.E (Sum Squares of Errors) وقد نسمي هذا أيضا مجموع مربعات الانحرافات. أما الحد الثاني فتمثل مجموع المربعات بين الأعمدة والذي سنرمز له. SSC (Sum Squares of Column) وقد يسمى من قبل بعض المؤلفين SSE خطأ المعاملات Treatment Sum of Squares.

من الأعمدة تمثل المعاملات المختلفة التي عددها  $k$  من المجتمعات والممثلة على اعتبار أن من المشاهدات  $K$  هي  $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k, X_{ij}$  وعلى هذا فإن المشاهدات  $k$  من المعاملات، ونعني بالمعاملة بشكل عام لمختلف التصنيفات سواء أكان أو القياسات ل ذلك محللين مختلفين مثل : أسمدة مختلفة، منتجات مختلفين، قطاعات مختلفة من صناعة معينة، ألوية مختلفة من بلد ما.

وكما سبق ذكره يلزمنا مقدرين للتباين  $\sigma^2 =$  أحدها يعتمد على  $k-1$  درجات حرية وهو :

$$S_1^2 = \frac{SSC}{k-1}$$

فإذا كانت  $H_0$  صحيحة فإن  $S_1^2$  مقدر غير متحيز  $\sigma^2$  وإذا كان  $H_1$  صحيح فإن SSE تكون له قيمة أكبر ويكون تقدير  $S_1^2$ ،  $\sigma^2$  مبالغ فيه.

والآخر وهو مقدر مستقل  $\sigma^2$  ويعتمد على  $(n-1)k$  درجات حرية وهو :

$$S_2^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}$$

ويكون هذا المتغير غير متحيز سواء أكانت  $H_0$  صحيحة أم  $H_1$  صحيحة.

= ويلاحظ أيضا أن مجموع المربعات قد قسمت الاختلاف وبذفس الوقت قسمت درجات الحرية :

$$nk-1 = k-1 + k(n-1)$$



وكخطوة أخيرة نحسب :

$$F_{\text{محصنة}} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

فعندما  $H_0$  : صحيحة فإن قيم المتغير العشوائي  $F$  توزع توزيع فيشر بدرجات الحرية  $F_{\alpha} [k-1, k(n-1)]$  وبما أن  $S_1^2$  تبالغ في تقدير  $\sigma^2$  عندما  $H_0$  غير صحيحة فإن لدينا اختبار بطرف واحد ومنطقة حرجة واقعة كليا على يمين التوزيع وعلى هذا فإن الفرضية  $H_0$  ترفض بدرجة معنوية  $\alpha$  عندما

$$F_{\text{محصنة}} > F_{\alpha, k-1, k(n-1)}$$

وقد جرت العادة في التطبيقات العملية أن نحسب أولا  $SST$  ثم  $SSC$  ونستعمل المعادلة  $SSE = SST - SSC$  لحساب  $SSE$ .

ويستحسن استعمال هذه المعادلة لحساب القيم السابقة :

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{nk}$$

$$SSC = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{.j}^2 - \frac{1}{nk} T_{..}^2$$

ونلخص جدول التباين (9-2) على النحو التالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	المحصنة $F$
بين الأعمدة	$SSC$	$n - 1$	$S_1^2 = \frac{SSC}{n - 1}$	$= \frac{S_1^2}{S_2^2}$
الخطأ	$SSE$	$k(n - 1)$	$S_2^2 = \frac{SSE}{k(n - 1)}$	
المجموع الكلي	$SST$	$nk - 1$		

جدول (9-2)

مثال (9-1) : البيانات التالية تبين خمس عينات عشوائية حجم كل عينة 5 مفردات مأخوذة من مجتمعات تتوزع توزيعا طبيعيا مستقلة عن بعضها البعض ذات أوساط حسابية  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$  وتباين مشترك  $\sigma^2$  والمطلوب اختبار  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$

مقابل  $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_5$  على مستوى دلالة  $\alpha = 0.05$  والجدول (9-3) يمثل هذا البيانات :

	1	2	3	4	5	
	7	9	3	2	7	
	4	7	5	3	6	
	9	8	2	4	9	
	6	6	3	1	4	
	7	9	7	4	7	
المجموع	26	39	20	14	33	132
المتوسط	5.2	7.9	4	2.8	6.6	5.28

جدول (9-3)

الحل : نتبع الخطوات التالية :

(1) نضع الفرضية العدمية  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  وكذلك الفرضية البديلة  $\mu_1 \neq \mu_2$   $H_1: \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

(2) نحدد مستوى الثقة وسنأخذ  $\alpha = 0.05$

(3) نجد F الجدولية حيث أن حيث أن  $F_{\alpha, 4, 20} = 2.87$

(4) نجد F المحسوبة وذلك من خلال تكوين جدول تحليل التباين.

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij} \right)^2}{nk}$$

$$= 5^2 + 4^2 + 8^2 + \dots + 4^2 + 7^2 - \frac{(132)^2}{25}$$

$$= 834 - 696.96 = 137.04$$

$$SSC = \frac{(26)^2 + (39)^2 + (20)^2 + (14)^2 + (33)^2}{5} - \frac{(132)^2}{25}$$

$$= 776.4 - 696.96 = 79.44$$

ثم نجد :

$$SSE = SST - SSC = 137.04 - 79.44$$

$$= 57.60$$

ثم نقوم بعملية تلخيص جدول التباين (9-4)

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	محصية F
بين الأعمدة	79.44	4	19.86	$= \frac{19.86}{2.88} = 6.896$
الخطأ	57.6	20	2.88	
المجموع الكلي	137.04	24		

جدول (9-4)

(5) نبدأ المقارنة ونقول بما أن محسوبة  $F > F_{\text{محصية}} أي 6.896 > 2.87$  لذا نرفض  $H_0$  والقائلة بأن المتوسطات متساوية وكثير ما نتعرض في الحياة العملية إلى ما يعرف بفقدان بعض البيانات أو استحالة وضع المشاهدات لعدد من مفردات العينة مثلاً موت بعض حيوانات التجربة وفي مثال آخر لتجربة مصممة لمقارنة مستويات الطلبة في شعب كانت متساوية من حيث الطلاب انسحب قسم منها وفي مثل هذه الحالات نجري تحليل التباين بالطريقة المعتادة ولكن بدلاً من عدد المفردات يمكن وضع هذه البيانات على شكل  $nk$  ويمكننا تعديل هذا العدد حسب الظروف الجديدة الطارئة بتعريف  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_n$  ونحسب

$$X_{i,k}^2$$

$$SSC = \sum_{i=1}^k X_i^2$$

أما بالنسبة لدرجات الحرية.

فدرجات الحرية لـ SST هي  $n - 1$ .

و درجات الحرية لـ SSC هي  $k - 1$ .

و درجات الحرية للخطأ SSE هي  $n - k$ .

مثال (9-2) : اختر الفرضية  $H_0$  بمستوى دلالة  $\alpha = 0.05$  للبيانات الواردة في جدول (9-5) حيث أن  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$   $H_0:$

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	
	4	5	8	
	7	1	6	
	6	3	8	
	6	5	9	
		3	5	
		4		
المجموع	23	21	36	80

جدول (9-5)

الحل : باتباع الخطوات السابقة.

(1) نضع الفرضية  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  مقابل  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$ .

(2) نجد الحسوبة  $F$  وذلك  $F(0.05, 2, 12) = 3.89$

(3) نبدأ بالحسابات التالية :

$$SST = (4)^2 + (7)^2 + (6)^2 + \dots + (9)^2 + (5)^2 - \frac{80^2}{15}$$

$$= 492 - 426.667 = 65.333$$

$$SSC = \frac{(23)^2}{4} + \frac{(21)^2}{6} + \frac{(36)^2}{5} + \frac{(80)^2}{15}$$

$$= 38.283$$

$$SSE = SST - SSC = 65.333 - 38.283 = 27.0$$

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	الحسوبة $F$
بين الأعمدة	38.283	$3 - 1 = 2$	19.142	$\frac{19.142}{2.254} = 8.49$
الخطأ	27.05	$15 - 3 = 12$	2.254	
المجموع الكلي	65.333	$15 - 1 = 14$		

جدول (6-9)

بما أن الحسوبة  $F > F$  الحسوبة أي  $8.49 > 3.89$  فإننا نرفض  $H_0$  على مستوى الدلالة  $\alpha = 0.05$  ونستنتج أن المتوسطات غير متساوية.

ملاحظات هامة :

يلاحظ مما سبق :

- أنه في حالة تساوي حجم العينات المأخوذة من الجهات المختلفة فإن قيم الحسوبة  $F$  غير حساسة للفرض بتساوي  $\sigma^2$  للمجتمعات المختلة لأن حجم الفئات متساوية.
- اختبار عينات متساوية يقلل من احتمال الوقوع في الخطأ II.
- سهولة الحسابات في حالة تساوي حجم العينات.

3-9 : اختبار تساوي مختلف التباينات

### Test for the Equality of Several Variances

ذكرنا فيما سبق أن نسبة الحسوبة  $F$  من تحليل التباين لا تتأثر سلبيا بفرضية تساوي التباين في المجتمعات التي عددها  $n$  والتي أخذت منها عينات متساوية الحجم، ولكن هذه ليست الحالة عندما تكون أحجام البيانات مختلفة، وفي هذه الحالة نريد اختبار فرضية ما إذا كانت هذه المتباينات متساوية.

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$  مقابل الفرضية الجديدة  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2$  ويسمى هذا الاختبار Bartlett's test بارتلت والذي يعتمد على إحصاء له توزيع عينة يقارب توزيع  $X^2$  عندما نسحب عينات عددها  $n$  من مجتمعات معتادة مستقلة. والخطوات المتبعة كما يلي :

(1) نحسب  $S_1^2 = S_2^2 = \dots = S_n^2$  أي  $n$  من العينات التي أحجامها  $n_1, n_2, \dots, n_n$  ثم نحسب التباين للتجميعي من العلاقة :

$$S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{n - k}$$

$$b = 2.3026 \cdot \frac{f}{h}$$

$$f = (n - k) \log S_a^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \log S_i^2$$

$$h = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - k} \right]$$

وهنا يكون للمتغيرة العشوائية  $b$  توزيع  $X^2$  بدرجات الحرية  $k - 1$  وتكون قيم  $b$  كبيرة عندما تبعد التباينات عن بعضها من حيث القيم وتساوي صفر عند تساوي التباينات، وعلى هذا نرفض فرضية  $H_0$  ، بمستوى معنوية  $\alpha$  عندما  $b > X_{\alpha, k}^2$ .

مثال : اختبر فرضية تساوي التباينات في المجتمعات الثلاثة التي أخذت منها العينات في المثال السابق :

الحل :

$$(1) H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$

$$(2) H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 = \sigma_3^2$$

$$(3) \alpha = 0.05$$

$$(4) \text{ المنطقة الحرجة } X_{\alpha, n-1}^2 = 5.991$$

$$(5) \text{ الحسابات } k = 3, n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 5$$

العينات الأولى 4, 6, 7 ،  $\bar{X} = 5.75$  ثم نجد تباين كل عينة على حدة من علاقة التباين :

$$S_1^2 = (0.25)$$

وبالمثل نجد باقي التباينات  $S_2^2 = 2.3, S_3^2 = 1.5833$  (6) النتيجة بما أن  $5.991 > 0.213$  نقبل  $H_0$  ونستنتج أن التباينات الثلاثة للمجتمعات التي عددها  $n$  والتي أخذت منها العينات متساوية.

#### 9-4 التصنيف باتجاهين ومشاهدة واحدة في كل خلية

يبين لدينا الجدول المزدوج التالي الذي يبين توزيع المحصول حسب ثلاثة أنواع ثلاثة أنواع مختلفة من القمح عوملت بأربعة أنواع من الأسمدة المختلفة

أنواع القمح

الأسمدة	$C_1$	$C_2$	$C_3$	
$M_1$	64	72	74	210
$M_2$	55	57	47	159
$M_3$	59	66	58	183
$M_4$	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول (9-7)

يمكن بشكل عام كتابة جدول في مثل هذه الحالة لأعمدة عددها  $n$  ولأسطر عددها  $k$

	الأعمدة						
السطور	1	2	3	.....j.....	n		
1	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	..... $X_{1j}$ .....	$X_{1n}$	$T_{1.}$	$\bar{X}_{1.}$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	..... $X_{2j}$ .....	$X_{2n}$	$T_{2.}$	$\bar{X}_{2.}$
3	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	..... $X_{3j}$ .....	$X_{3n}$	$T_{3.}$	$\bar{X}_{3.}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
i	$X_{i1}$	$X_{i2}$	.....	..... $X_{ij}$ .....	$X_{in}$	$T_{i.}$	$\bar{X}_{i.}$
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
m	$X_{m1}$	$X_{m2}$	.....	..... $X_{mj}$ .....	$X_{mn}$	$T_{m.}$	$\bar{X}_{m.}$
	$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$	..... $T_{.j}$ .....	$T_{.n}$		$T_{..}$
	$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$	$\bar{X}_{.3}$	..... $\bar{X}_{.j}$ .....	$\bar{X}_{.n}$		$\bar{X}_{..}$

جدول (9-8)

وسنستخرج فيما يلي بعض القوانين التي ستمكننا من اختبار ما إذا كان التفاوت في المحصول سببه الاختلاف في نوع القمح أم في طريقة التسميد أم في كلاهما معا.

وعلى فرض أن  $X_{ij}$  هي قيم مستقلة للمتغير العشوائي لها توزيع طبيعي بمتوسط  $\mu_{ij}$  وتباين مشترك  $\sigma^2$  فإننا سنعطي أيضا بعض التعريفات للرموز المعطاة

$\bar{X}_i$ : هي متوسط المحصول في السطر  $i$

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^k \mu_{ij}}{k}$$

$T_i$ : مجموع المحصول في السطر  $i$

$T_j$ : مجموع المحصول في العمود  $j$

$\bar{X}_m$ : متوسط المحصول في العمود  $j$

متوسط المجتمع للعمود الذي رقم  $j$  هو

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \mu_{ij}}{c \times r}$$

لمتوسط الكلي لمتوسطات المجتمع  $k \times n$  هو  
ولكي نقرر ما إذا كان الجزء من التفاوت يعود إلى تأثير أنواع القمح المختلفة نضع الفرضية التالية

$$H'_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$$H'_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \dots \neq \mu_k$$

ولكي نقرر ما إذا كان الجزء من التفاوت يعود إلى تأثير أنواع السماد

$$H''_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$$

$$H''_1: \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \dots \neq \mu_n$$

ومعلوم أن أي من المشاهدات يمكن كتابتها كما في

$$X_{ij} = \mu_{ij} + S_{ij}$$

حيث  $S_{ij}$  تقيس الانحراف بين القيم المشاهدة  $X_{ij}$  ومتوسط المجتمع أو

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

حيث  $\alpha_i$ : هو تأثير السطر i

$\beta_j$ : تأثير العمود j

ويفترض أن تأثير العمود وتأثير السطر تقبل عملية الجمع وعليه

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + S_{ij}$$

بشرط أن

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^c \beta_j = 0$$

$$\mu_i = \frac{\sum (\mu + \alpha_i + \beta_j)}{c} = \mu + \alpha_i$$

$$\mu_j = \frac{\sum (\mu + \alpha_i + \beta_j)}{r} = \mu + \beta_j$$

وتصبح طريقة صياغة الفرضية السابقة بالشكل التالي

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_r = 0$$

وهذا هو تأثير السطور

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_c = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3 \dots \beta_c \neq 0$$

وكل من هذه الاختبارات مبني على مقارنة مقدرات مستقلة لتباين المجتمع  $\sigma^2$  وذلك بعد أن نفصل مجموع مربعات الانحرافات للقيم إلى ثلاث مكونات

$$SST = SSR + SSC + SSE$$

الآن نقدم علاقات رياضية تساعد في إيجاد كل مكون على حدى.

$$SST = \sum x_{ij}^2 - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSR = \sum_{i=1}^r \frac{T_i^2}{c} - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSC = \sum_{j=1}^c \frac{T_j^2}{r} - \frac{T^2}{cr}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC$$



$$SST \Rightarrow cr - 1$$

$$SSR \Rightarrow r - 1$$

$$SSC \Rightarrow c - 1$$

$$SSE \Rightarrow (r - 1)(c - 1)$$

ولتقدير  $\sigma^2$  والذي سيكون  $S^2$  لكل من المجاميع ويعتمد على درجة الحرية المقابلة

$$S^2_1 = \frac{SSR}{r - 1}$$

وعليه فسطور

فإذا كانت تأثيرات (effect) السطور

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

فان  $\sigma^2$  هو مقدر غير متحيز ل  $\sigma^2$  أما إذا كانت التأثيرات ليست كلها صفر فإننا نحصل على تقدير مبالغ فيه ل  $\sigma^2$  بواسطة  $S^2_1$

والمقدر الثاني ل  $\sigma^2$  هو  $S^2$  والذي يعتمد على  $n-1$  من درجات الحرية حيث

$$S^2_2 = \frac{SSC}{c - 1}$$

وهذا المقدر غير متحيز ل  $S^2$  إذا كانت

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_c = 0$$

وإلا فإنه يبالغ في تقدير  $\sigma^2$

والمقدر الثالث هو  $S^2_3$  بدرجات حرية  $(r-1)(c-1)$  وهو مستقل عن  $S^2_1, S^2_2$  حيث

$$S^2_3 = \frac{SSE}{(r - 1)(c - 1)}$$

هو غير متحيز مهما كان الأمر عن عدم صحة الفرضيات واختبار الفرضية التي تنص على أن تأثير السطور صفر نحسب  $F_1$  من العلاقة

$$F_1 = \frac{S^2_1}{S^2_3}$$

وهي قيمة المتغير العشوائي  $F$  الذي له توزيع فيشر بدرجات حرية

$$F_1 < F_{\alpha}[(r-1), (r-1)(c-1)]$$

$$F_1 > F_{\alpha}[(r-1), (r-1)(c-1)]$$

ونرفض الفرضية  $H_0$  بمستوى المعنوية  $\alpha$  عندما  
وبالمثل نختبر الفرضية بأن تأثير الأعمدة = صفر بحساب

$$F_2 = \frac{S^2_2}{S^2_3}$$

حيث  $F_2$  لها توزيع فيشر بدرجات حرية  $(c-1), (r-1)(c-1)$   
وعليه فإننا نقبل  $H_0$  عندما

$$F_2 < F_{\alpha}[(c-1), (c-1)(r-1)]$$

ونرفض الفرضية  $H_0$  عندما

$$F_2 > F_{\alpha}[(c-1), (c-1)(r-1)]$$

ملاحظة: كما في التصنيف باتجاه واحد فإن تقسيم مكونات التفاوت يقسم أيضا  
درجات الحرية

والآن نكتب جدول (9-9) للتباين

F المحسوبة	درجات الحرية	متوسط المربعات	مجموع المربعات	مصدر التفاوت
$F_{1c} = \frac{S^2_1}{S^2_3}$	$r-1$	$S^2_1 = \frac{SSR}{r-1}$	SSR	بين الصفوف
$F_{2c} = \frac{S^2_2}{S^2_3}$	$c-1$	$S^2_2 = \frac{SSC}{c-1}$	SSC	بين الأعمدة
	$(r-1)(c-1)$	$S^2_3 = \frac{SSE}{(r-1)(c-1)}$	SSE	الخطأ
	$rc-1$		SST	الكلية

جدول (9-9)

مثال (9-4): البيانات التالية تمثل الكميات المنتجة عند استعمال أنواع مختلفة من القمح وأنواع مختلفة من السماد

أنواع القمح

الأسمدة	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	
M <sub>1</sub>	64	72	74	210
M <sub>2</sub>	55	57	47	159
M <sub>3</sub>	59	66	58	183
M <sub>4</sub>	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول (9-10)

- 1) اختبر الفرضية بمستوى معنوية  $\alpha = 0.05$  ما إذا كان هنالك فرق في إنتاج القمح عند استعمال أنواع مختلفة من السماد.
- 2) اختبر الفرضية بأنه لا يوجد فرق بالمتوسط في إنتاج القمح في الأنواع الثلاثة.

الحل: نفرض أن تأثير السطور والأعمدة يساوي صفراً أي

$$1) H_0' : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

$$H_0'' : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

مقابل الفرضية البديلة

$$2) H_1' : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$$

$$H_1'' : \beta_1 \neq \beta_2 = \beta_3 \neq 0$$

نحدد مستوى المعنوية

$$3) \alpha = 0.05$$

نحسب قيم F الجدولة لكل اختبار على حدى

$$4) F_{11} = F_{\alpha} [(r-1), (r-1)(c-1)]$$

$$= F_{0.05[3,6]} = 4.7621$$

$$F_{21} = F_{\alpha} [(c-1), (r-1)(c-1)]$$

$$F_{21} = F_{0.05}[2,6] = 5.14$$

مع ملاحظة أن  $F_{21}, F_{11}$  تعني القيمة الجدولية ل F وسنرمز للقيمة المحسوبة ل F بالرمز  $F_{1c}, F_{2c}$  وسنقوم بحساب مجاميع المربعات من العلاقات أعلاه .

$$5) SST = (64)^2 + (55)^2 + \dots + (53)^2 - \frac{(720)^2}{12}$$

$$SSR = \frac{(210)^2 + (159)^2 + (183)^2 + (168)^2}{3} - \frac{(720)^2}{12} = 498$$

$$SSC = \frac{(236)^2 + (252)^2 + (232)^2}{4} - \frac{(720)^2}{12} = 56$$

$$SSE = 662 - 498 - 56 = 108$$

ثم نكون جدول تحليل التباين (9-11)

مصدر التفاوت	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسطات المربعات	$F_c$
بين السطور	498	3	166	$F_{1c}=9.23$
بين الأعمدة	56	2	28	$F_{2c}=1.53$
الخطأ	108	6	18	
الكل	662	11		

جدول (9-11)

$$6) 9.22 > 4.76 \Rightarrow F_{1c} > F_{1\alpha}$$

ونسنتج وجود اختلاف في المتوسط في إنتاج القمح عند استعمال أنواع مختلفة من السماد

$$1.56 < 5.14 \Rightarrow F_{2c} < F_{2\alpha}$$

فإننا نقبل  $H_0$  ونسنتج عدم وجود اختلاف في متوسط الإنتاج للأنواع الثلاثة من القمح.

## 9-5 : التصنيف باتجاهين لعدة مشاهدات في الخلية

two-way Classifications, Several observations per cell

افترضنا في الفصل السابق أن تأثير السطور وتأثير الأعمدة تنطبق عليه خاصية الانجماع بمعنى أن باستطاعتنا كتابة

$$\mu_{ij} - \mu_{i'j} = \mu_{ij} - \mu_{i'j}$$

بمعنى أن الفرق بين متوسطات المجتمع للأعمدة  $j, j'$  هو نفسه لأي من السطور والفرق بين متوسطات المجتمع لأي من السطور  $i, i'$  هو نفسه لأي من الأعمدة، وبالعودة إلى مثال أنواع القمح المعاملة بالأسمدة نستطيع القول مما تقدم بأنه لو كانت النوعية  $C_2$  تنتج بالمعدل 5 وحدات من القمح للدونم أكثر من النوعية  $C_1$  عند استعمال  $M_1$  من الأسمدة، عندها فإن  $C_2$  تنتج بالمعدل 5 وحدات من القمح أكثر من  $C_3$  عند استعمال  $M_2, M_3, M_4$ . وبالمثل لو أن  $C_1$  تنتج 3 وحدات من القمح للدونم باستعمال  $M_2$  أكثر منها عند استعمال  $M_4$  عندها فإن  $C_2$  أو  $C_3$  ستنتج أيضا 3 وحدات من القمح أكثر عند استعمال  $M_2$  بدلا من  $M_4$  وفي كثير من التجارب فإن فرض القابلية للانجماع لا يتحقق وتحليل الجدول كما في الطريقة السابقة قد يقود إلى استنتاج خاطئ. فعلى فرض أن النوع  $C_2$  ينتج 5 وحدات للدونم من  $C_1$  عند استعمال  $M_1$  ولكنه ينتج 2 وحدة أكثر من  $C_1$  عند استعمال  $M_1$  ولكنه ينتج 2 وحدة أكثر من  $C_1$  عند استعمال  $M_2$ . عند ذلك نقول بأن أنواع القمح وأنواع الأسمدة تتفاعل فيما بينها تفاعلا بينيا

مثال (9-5): بالعودة للمثال (9-12)

أنواع القمح

الأسمدة	$C_1$	$C_2$	$C_3$	
$M_1$	64	72	74	210
$M_2$	55	57	47	159
$M_3$	59	66	58	183
$M_4$	58	57	53	168
	236	252	232	720

جدول (9-12)

نستطيع بنظرة فاحصة أن نثبت أن هنالك ما يسمى بالتفاعل البيئي يعود إلى الخطأ التجريبي وإذا ما كان التفاوت في هذه المعطيات يتألف جزئيا من تأثير التفاعل البيئي فإن مصدر التفاوت هذا يبقى يشكل جزءا من مجموع المربعات ويؤدي بدوره إلى تقدير  $\sigma^2$  بشكل مبالغ فيه ويزيد بدوره احتمال وقوع بالخطأ II.

ولكي نختبر الفرق بين متوسطات السطور ومتوسطات الأعمدة عندما يكون عامل التفاعل البيئي جوهرياً فإن علينا أن نحصل على تقدير مستقل وغير متحيز لـ  $\sigma^2$  ولهذا الغرض نقوم بتفحص المشاهدات المتكررة والتي حصلنا عليها في ظروف مماثلة ولنفرض أن لنا الحق بالاعتقاد أن أنواع القمح وأنواع الأسمدة في المثال السابق تتفاعل فيما بينها فانتنا نكرر التجربة مرتين مستعملين 36 قطعة بدلا من 12 ونقوم برصد المشاهدات كما في الجدول (9-9) ونقول أن التجربة مكررة ثلاث مرات.

وسنستخرج فيما يلي بعض القوانين التي ستمكننا من اختبار ما إذا كان التفاوت في المحصول سببه الاختلاف في نوع القمح أم في طريقة التسميد أم كلاهما. وبما أن لدينا كما سبق  $r$  من السطور،  $c$  من الأعمدة فإنه يكون لدينا هذه المرة بدلا من  $X_{ij}$  مجموعة من المشاهدات عددها  $n$  حيث  $k=1,2,\dots,n$  ويرمز لأي من المشاهدات (المكررة)  $X_{ijk}$  في  $rck$  من القيم وتكون أي عينة من الحجم  $n$  لها توزيع طبيعي بمتوسط  $\mu_{ij}$  وتباين  $\sigma^2$  وكل  $ij$  من المجتمعات له  $\sigma^2$  والآن نعطي الرموز التالية

$T_{ij}$ : مجموع المشاهدات في الخلية التي ترتبها  $ij$ .  
 $T_{i..}$ : مجموع المشاهدات في السطور الذي ترتبه  $i$ .  
 $T_{.j}$ : مجموع المشاهدات في العمود الذي ترتبه  $j$ .  
 $T_{...}$ : مجموع المشاهدات والتي عددها  $rcxn$  من المشاهدات.  
 $\bar{X}_{ij}$ : متوسط المشاهدات في الخلية التي ترتبها  $ij$ .  
 $\bar{X}_{i..}$ : متوسط المشاهدات في السطر  $i$ .  
 $\bar{X}_{.j}$ : متوسط المشاهدات في العمود  $j$ .  
 $\bar{X}_{...}$ : متوسط المشاهدات لعدد  $rcxc$  من المشاهدات  
ويمكن كتابة أية قيمة من المشاهدات على النحو:

$$X_{ijk} = \mu_{ij} + S_{ijk}$$

حيث  $S_{ijk}$  هي الانحرافات لقيم  $X_{ijk}$  عن وسط المجتمع  $\mu_{ij}$  وإذا رمزنا للتفاعل البيئي بين السطر  $i$  والعمود  $j$  بالرمز  $(\alpha\beta)_{ij}$ ،  $\alpha_i$ : تأثير السطر  $i$ ،  $\beta_j$ : تأثير العمود  $j$ ،  $\mu$  المتوسط العام فإن

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

وعلى هذا فإن

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + S_{ijk}.$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^c \beta_j = 0, \sum_{i=1}^r (\alpha\beta)_{ij} = 0, \sum_{j=1}^c (\alpha\beta)_{ij} = 0$$

وعليه فإننا نختبر الفرضيات الثلاث التالية كما يلي:

$$1) H'_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

$$H'_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \dots = \alpha_r \neq 0$$

$$2) H''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

$$H''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \dots = \alpha_r \neq 0$$

$$3) H'''_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

$$H'''_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2 = \dots = \alpha_r \neq 0$$

وحتى يتم الاختبارات نقدم أولاً النظرية التالية  
نظرية (9-2):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \overline{X}_{...})^2 &= cn \sum_{i=1}^r (\overline{X}_{i..} - \overline{X}_{...})^2 + rn \sum_{j=1}^c (\overline{X}_{.j.} - \overline{X}_{...})^2 \\ &+ n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c (\overline{X}_{ij.} - \overline{X}_{i..} - \overline{X}_{.j.} + \overline{X}_{...})^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^n (X_{ijk} - \overline{X}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

من هنا نحصل على المعادلة التالية

$$SST = SSR + SSC + SS(rc) + SSE$$

حيث

$$SST = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \sum_{k=1}^n X^2_{ijk} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSR = \frac{\sum_{i=1}^r T^2_{i..}}{nc} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSC = \frac{\sum_{j=1}^c T^2_{.j.}}{nr} - \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SS(rc) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c T^2_{ij.}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^r T^2_{i..}}{nc} - \frac{\sum_{j=1}^c T^2_{.j.}}{rn} + \frac{T^2_{...}}{ncr}$$

$$SSE = SST - SSR - SSC - SS(rc)$$

أما بالنسبة لدرجات الحرية لكل من التفاوتات.

$$SST \rightarrow ncr - 1$$

$$SSR \rightarrow r - 1$$

$$SSC \rightarrow c - 1$$

$$SS(rc) \rightarrow (r - 1)(c - 1).$$

$$SSE \rightarrow rc(n - 1)$$

ونقوم الآن بحساب متوسطات مجاميع المربعات.

$$S^2_1 = \frac{SSR}{r - 1}, S^2_2 = \frac{SSC}{c - 1},$$

$$S^2_3 = \frac{SS(rc)}{(r - 1)(c - 1)}, S^2_4 = \frac{SSE}{rc(n - 1)}$$

ثم نقوم بحساب F المحسوبة لقيم التفاوتات

$$F_{1c} = \frac{S^2_1}{S^2_4}, F_{2c} = \frac{S^2_2}{S^2_4}$$

$$F_{3c} = \frac{S^2_3}{S^2_4}$$

ثم نحسب F الجدولية على النحو



$$F_{11} = F_{\alpha}[(r-1), rc(n-1)], F_{21} = F_{\alpha}[(c-1), rc(n-1)]$$

$$F_{31} = F_{\alpha}[(r-1)(c-1), rc(n-1)]$$

وعليه فإننا نقبل

(1)  $H_0'$  إذا كانت  $F_{1t} > F_{1c}$  ونرفضها إذا كانت  $F_{1t} < F_{1c}$

(2)  $H_0''$  إذا كانت  $F_{2t} > F_{2c}$  ونرفضها إذا كانت  $F_{2t} < F_{2c}$

(3)  $H_0'''$  إذا كانت  $F_{3t} > F_{3c}$  ونرفضها إذا كانت  $F_{3t} < F_{3c}$

ويمكن تلخيص كل ما تقدم في الجدول التالي:

ف المحسوبة	متوسطات المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التفاوت
$F_{1c} = \frac{S^2_1}{S^2_4}$	$S^2_1 = \frac{SSR}{r-1}$	$r-1$	SSR	متوسطات السطور
$F_{2c} = \frac{S^2_2}{S^2_4}$	$S^2_2 = \frac{SSC}{c-1}$	$c-1$	SSC	متوسطات الأعمدة
$F_{1c} = \frac{S^2_3}{S^2_4}$	$S^2_3 = \frac{SS(rc)}{(r-1)(c-1)}$	$(r-1)(c-1)$	SS(rc)	التفاعل البيئي
	$S^2_4 = \frac{SSE}{rc(n-1)}$	$rc(n-1)$	SSE	الخطأ
		$rcn-1$	SST	الكلية

جدول (9-13)

مثال (9-6): لدينا البيانات التالية

أنواع الأسمدة	أنواع القمح		
	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
M <sub>1</sub>	64	72	74
	66	81	51
	70	64	65
M <sub>2</sub>	65	57	47
	63	43	58
	58	52	67
M <sub>3</sub>	59	66	58
	68	71	39
	65	59	42
M <sub>4</sub>	58	57	53
	41	61	59
	46	53	38

جدول (9-14)

- والمطلوب: اختر الفرضية بمستوى معنوية.
- (A) لا يوجد فرق بين متوسط محصول القمح عند معاملته بأنواع الأسمدة المختلفة.
- (B) لا يوجد فرق بين متوسط الإنتاج لنوعيات القمح الثلاث.
- (C) لا يوجد تفاعل بيني بين أنواع السماد وأنواع القمح.
- الحل: نكون أولاً جدول المجاميع (9-15).

	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	المجموع
M <sub>1</sub>	200	217	190	607
M <sub>2</sub>	186	152	172	510
M <sub>3</sub>	192	196	139	527
M <sub>4</sub>	145	171	150	466
المجموع	723	736	651	2210

جدول (9-15)

وننتبع الخطوات سالفة الذكر.  
(1) نضع الفرضيات التالية

$$a) H'_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$H'_1: \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$

$$b) H''_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$H''_1: \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$

$$c) H'''_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

$$H'''_1: \alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \neq 0$$

(2) نجد قيم F الجدولية على النحو

$$F_{11} = F_{0.05}[3,24] = 3.01$$

$$F_{21} = F_{0.05}[2,24] = 3.4$$

$$F_{31} = F_{0.05}[6,24] = 2.51$$

(3) نبدأ بحساب مختلف قيم المجاميع المطلوبة

$$SST = (64)^2 + (66)^2 + \dots + (38)^2 - \frac{(2110)^2}{36} = 127448 - 123669 = 3779$$

$$SSR = \frac{(607)^2 + (510)^2 + (527)^2 + (466)^2}{9} - \frac{(2110)^2}{36} = 124826 - 123669 = 1157$$

$$SSC = \frac{(723)^2 + (736)^2 + (651)^2}{12} - \frac{(2110)^2}{36} = 124019 - 123669 = 350$$

$$SS(rc) = \frac{(200)^2 + (186)^2 + \dots + (150)^2}{3} - 12486 - 124019 + 123669 = 771$$

ثم نلخص البيانات في جدول التباين (9-16).

ف المحسوبة	متوسطات المربعات	درجات الحرية	مجموع المربعات	مصدر التفاوت
1,17	385,667	3	1157	متوسطات الأسطر
2,8	175,00	2	350	متوسطات الأعمدة
2,05	128,50	6	771	التفاعل البيئي
	62,542	24	1501	الخطأ
		35	3779	الكلي

جدول (9-16)

النتائج:

(a) نرفض  $H_0'$  ونقول بأن هنالك فرق في متوسط المحاصيل عند معاملته بأسمدة مختلفة.

(b) نقبل  $H_0''$  ونقول أنه لا يوجد فرق بين متوسطات محاصيل القمح للأنواع المختلفة.

(c) نقبل  $H_0'''$  ونقول أنه لا يوجد تفاعل (تداخل) بين أنواع القمح المختلفة وأنواع الأسمدة المختلفة.

#### 6-9 مناقشة لتصميم التجارب

تستعمل طريقة تحليل التباين لفصل التفاوت لمجموعة من البيانات التجريبية لمكونات تقيس مختلف مصادر التفاوت وتعتمد الخطوات التي تقود لهذه الطريقة من التحليل الإحصائي على تصميم التجربة لذا يلجأ الباحث في حل المسألة إلى تناسب تصميم تجربة تناسب طريقة التحليل التي يرى من الضرورة أن يتبعها.

وتعتبر أبسط طرق التصميم «بالتصميم العشوائي الكامل Completely Random Design» وفي هذه الطريقة نعطي لكل معاملة Treatment الحق في التكرار بالنسوي. ونطبق على جميع مواد التجربة material وعلى سبيل المثال (إذا كانت التجربة لأنواع القمح في قطع أرض مقسمة، يقال أن التصميم عشوائي كامل إذا طبق كل نوع من أنواع القمح على مختلف القطع وتحلل البيانات كما في القسم الأول).

أما إذا كانت المعاملات كمثل جميع الحالات الممكنة لعاملين مثل  $k$  حالة يمكن أن تستعمل فيها ثلاثة أنواع قمح مع أربعة أنواع أسمدة ومواد التجربة كبيرة بشكل يكفي لإعادة التجربة مرة أو أكثر على 12 حالة ممكنة في هذه الحالة تستخدم طريقة التحليل باتجاهين كما سبق شرحه. وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المعاملات قليل ومواد التجربة متجانسة.

والطريقة الأخرى هي التصميم لمجموعات عشوائية Randomized Block Design وتتمثل هذه الطريقة بالخطوات التالية

1) تقسم مواد التجربة إلى مجموعات بحيث تكون وحدات كل مجموعة متجانسة في ما بينها.

2) نعتبر كل مجموعة (عضو) في هذه المجموعات كإعادة للمعاملة.

3) نطبق المعاملات (بالاختيار العشوائي) على كل وحدات كل مجموعة.

مثال (7-9): إذا كانت المعاملات تستعمل عاملا واحدا (منفرد) فإن التحليل يكون تحليل تباين باتجاهين حيث السطور تمثل المجموعات والأعمدة تمثل المعاملات أما إذا كانت هنالك حالة تعدد العوامل فإن التحليل هنا للتصميم لكل المجموعات العشوائية حيث المعاملات هي كل التوافيق (الحالات) الممكنة لعاملين أو أكثر. وهذا يقودنا إلى صعوبات كثيرة منها عدم توفر أمكنة كافية متجانسة من أدوات التجربة لكل هذه الحالات. ونلجأ عندها لاستعمال التصميم العشوائي الناقص والتي تسمح باستقصاء الفروق بين  $n$  من المعاملات مرتبة ب من المجموعات في كل منها  $k$  من الوحدات حيث  $k < n$

وتصمم التجربة بشكل مجموعات عشوائية مفيد جدا في التقليل من خطأ التجربة لأن يستبعد واحدا من مصادر التفاوت.

وهناك طريقة أخرى للتصميم لضبط نوعين من أنواع التفاوت وفي نفس الوقت يقلل من عدد تكرارات المعاملات ويسمى بالمربع اللاتيني Latin square

مثال (8-9): 4 أنواع قمح مع أربع أنواع أسمدة مأخوذة خلال 4 سنوات

مجموع الحالات الممكنة لإعادة التجربة هي  $64 = 4 \times 4 \times 4$

ولكن مع اختبار نفس العدد من المجموعات للثلاثة عوامل المستعملة يستطيع اختبار يصمم المربع اللاتيني ونجري عليه التحليل باستعمال 16 معاملة فقط

السطور	الأعمدة			
	4	3	2	1
1	A	B	D	C
2	C	B	A	D
3	D	A	D	C
4	A	D	C	B

جدول (9-17)

A B C D : أنواع القمح الأربعة

السطور: 4 أنواع الأسمدة

الأعمدة: 4 سنوات

كل معاملة تطبق مرة واحدة في كل سطر وفي كل عمود وعلى هذا علينا أن  
نفصل التفاوت الناتج عن أنواع الأسمدة المختلفة بالنسبة للأربعة سنوات لأربعة  
أنواع من القمح. لأي باحث أن يصمم تجربة مناسبة تقود إلى نتائج مقبولة

### تعارين عامة على تحليل التباين

س 1 : ثلاثة شعب في مادة مبادئ الرياضيات التي تعطي من قبل 3 مدرسين كانت النتائج النهائية كما يلي :

الدرجات

A	B	C
73	88	68
89	78	79
82	48	56
43	91	91
80	51	71
73	85	71
66	74	87
60	77	41
45	31	59
93	78	68
36	62	63
77	62	79
	96	53
	80	15
	56	

(1) هل يوجد فرق جوهري بين متوسطات العلامات المعطاة من قبل الـ 3 مدرسين على اعتبار أن

(2) اختبر تماثل التباين المجتمعات الثلاثة.

س 2 : في مصنع للمواد اللاصقة بالمطاط يوجد 6 آلات لإنتاج هذه المادة نريد مقارنة هذه الآلات بالنسبة لضرورة المادة على الالتصاق، ولهذا القرض أخذت عينة مكونة من 4 زجاجات من إنتاج كل آلة. وشوهد قدره المادة على الالتصاق بوحدات باوند/انش  $10^{-2}$   $\times 2$  وها هي المشاهدات

1	2	3	4	5	6
18.3	17.5	14.6	20.3	16.4	17.5
16.2	19.2	16.7	17.8	19.22	16.9
17.5	16.5	20.8	17.8	17.7	15.8
20.1	20.5	18.9	18.9	15.4	18.6

طبق تحليل التباين بمستوى معنوي  $\alpha = 0.05$  وبين ما إذا كانت متوسطات المعاملات تختلف جوهريا.

س3 : استعملت أربعة أنظمة اختراق لـ ثلاثة أنواع صواريخ وقيست الاختراق كما في الجدول التالي :

طريقة الاختراق أنواع الصواريخ	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	a <sub>3</sub>	a <sub>4</sub>
A	34.0	30.1	29.8	29.0
	32.7	32.8	26.7	28.9
B	33.0	30.2	28.7	27.6
	33.2	29.8	28.1	27.8
C	58.4	27.3	29.7	28.8
	29.3	28.9	27.3	27.3

والمطلوب:

- (1) هل يوجد فروق هامة بين متوسطات الاختراق الأنظمة الصواريخ المختلفة.
  - (2) هل يوجد تفاعل بين نظام الصاروخ ونظام الاختراق.
- س4 : من ثلاث مختبرات متخصصة في التحليل الكيميائي أخذت عينات من المواد المرسله لهذه المختبرات فإذا كانت هذه المختبرات تعطي نفس النتيجة في التحليل وكانت النتائج كما يلي :

A	B	C	D
58.7	62.7	55.9	60.7
61.4	64.5	56.1	60.3
60.9	63.1	57.3	60.9
59.1	59.2	55.2	61.4
58.2	60.3	58.1	62.3

a- استعمل اختبار بارتنيت لتحديد ما إذا كان القباين بين المجتمعات تختلف جوهريا بمستوى معنوي 0.05.

b- إذا قبلت الفرضية في أ طبق طريقة تحليل التباين وعلق على نتائج التحليل في المختبرات الثلاثة.

س4 : فيما يلي نتائج خمس طلاب لـ 4 امتحانات في الرياضيات، الانجليزي، الفرنسي، والأحياء.

الرياضيات	الانجليزي	الفرنسي	الأحياء	الامتحان الطلبة
88	51	73	87	1
63	58	81	81	
79	72	77	92	2
80	65	77	76	
79	85	82	80	3
96	95	36	93	
56	67	80	62	4
68	88	68	67	
67	74	91	77	5
66	47	95	79	
51	59	59	84	6
89	82	92	73	



4	49	55	52	43	49	76	60	35
	56	53	32	42	76	26	70	64
5	76	83	81	95	94	85	77	99
	80	87	96	98	76	83	95	87

المطلوب :

- (1) هل الامتحانات هي نفس المستوى من حيث الصعوبة.
  - (2) هل الطلبة هم في نفس المستوى من القابلية.
  - (3) هل هناك من الطلبة ما يتفاعل مع بعض المواد بشكل مختلف عن الأخرى.
- س5 : إذا كان لدينا شركة تنتج نوعين من أفران المطبخ الكهربائي ولها ثلاثة سياسات في التسويق والدعاية، وتبيع هذه السلع في السوق (المبيعات الشهرية = س) حجم تجربة تقود لتحليل التباين.

والمطلوب :

- (1) ما هو التباين الكلي للمبيعات : اكتب الصيغة الرياضية.
- (2) ما هو نوع الصنف في هذه التجربة.
- (3) صياغة الفرضيات التي تقود لمعرفة التأثيرات المختلفة في التجربة السابقة.

س6 : أثبت أن

- (a) ما هو نوع التصنيف في هذه المعادلة.
- (b) ما هو عدد درجات الحرية لكل من مكونات التفاوت.



## الفصل العاشر

### تطبيقات الحاسوب

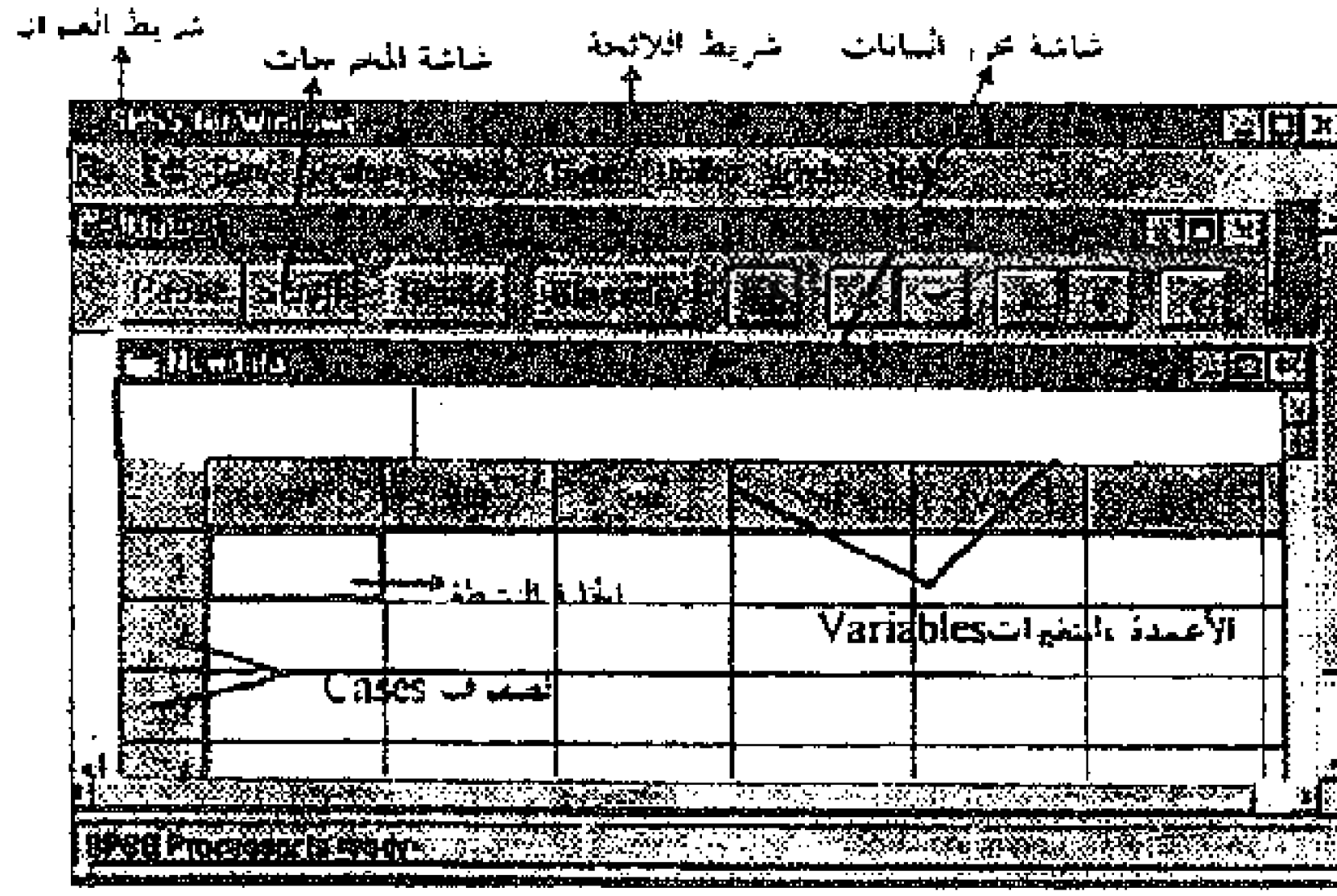
#### 10-1 مقدمة Introduction

يلعب علم الإحصاء دورا هاما في المجالات شتى من مناحي الحياة كما المجالات الاقتصادية والتربوية والاجتماعية وقد عمل الباحثون في هذه المجالات وعانوا ما عانوا من الجهد الكبير وخاصة عند إجراء التقييم الإحصائي للبحث ونظرا لصعوبة العمليات الحسابية كانت تجبر الباحثين على أخذ عيناتهم بأحجام صغيرة قد لا تفي بالغرض المطلوب. وأحيانا قد لا تؤدي إلى المطلوب إلا أنهم كانوا يقبلون بالنتائج كما هي بالرغم من عدم دقتها. إلا أنه ومع تقدم علم الحاسوب أصبح بإمكان الباحثين أخذ حجم العين التي يريدون تحقق أهدافهم المرجوة ولمساعدتهم على ذلك ولكي يتمكنوا هم والمهتمين في هذا المجال من الاستفادة من الحاسبات الإلكترونية تقدم برنامجا جاهزا يستعينون به يطلق عليه SPSS من خلال النوافذ Windows.

#### 10-2 تشغيل البرنامج SPSS

عند تشغيل نوافذ Windows لا بد من اتباع الخطوات التالية:

- 1) ننقر على الكلمة Start الموجودة في أسفل الشاشة على شريط المهمة Task Bar.
- 2) ننقر على الكلمة برامج Programs من قائمة البدء.
- 3) ننقر نقرأ مزدوجا فوق الكلمة من القائمة الفرعية في أمر البرنامج Programs فتظهر ثلاثة نوافذ هي على التوالي نافذة SPSS ، نافذة المخرجات، و نافذة محرر البيانات كما في الشكل (10-1)



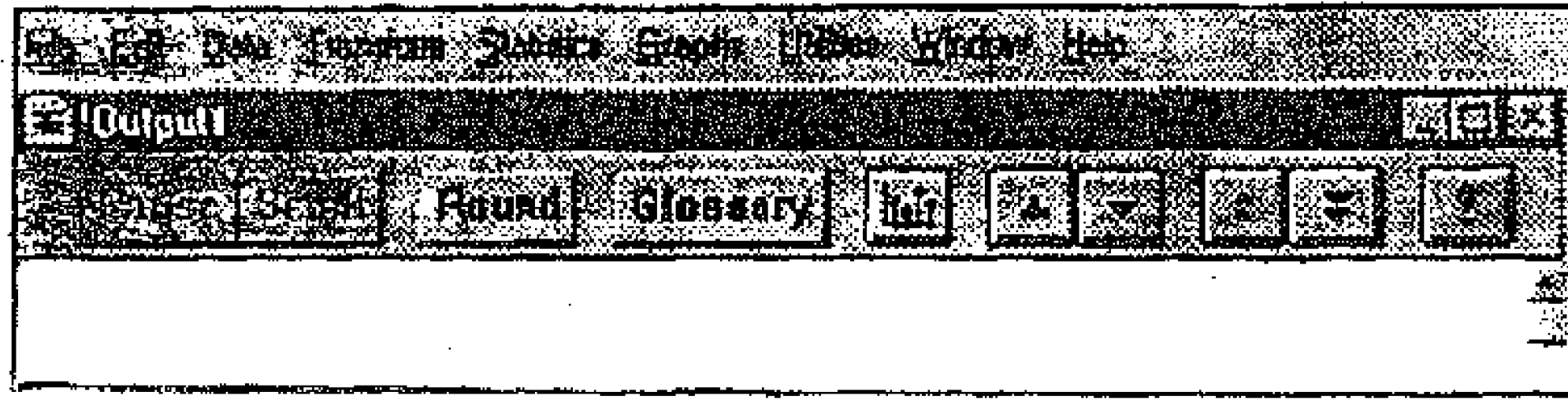
شكل (10-1) نافذة المخرجات و نافذة محرر البيانات في SPSS

### 10-3 شاشات SPSS

يستخدم SPSS عدة أنواع من النوافذ أهمها:

1- شاشة محرر البيانات Data Editor window : تشبه هذه الشاشة شاشة الجدول الإلكتروني Spreadsheets (Excel) انظر الشكل (10-1) من خلال هذه الشاشة تستطيع إنشاء وتحرير ملفات البيانات وتنتهي أسماء ملفات بيانات Spss بالملحق SAV هذا ويمكنك قراءة ملفات SPSS من خلال تطبيقات أخرى مثل Excel .

2- نافذة المخرجات Output Window : وهي النافذة التي تفتح بشكل تلقائي عند استدعاء تطبيق SPSS وفيها يتم تخزين ناتج العمليات الإحصائية وتنتهي أسماء الملفات التابعة لهذه الشاشة بالملحق LST ويمكنك إجراء التعديلات على محتويات هذه النافذة وإذا رغبت في فتح أكثر من نافذة مخرجات فيمكنك إنشاء نوافذ جديدة باختيار الأمر جديد New من قائمة ملف File ثم انقر فوق SPSS Output انظر الشكل (10-2)



الشكل (10-2) نافذة المخرجات

وهذه أهم الأيقونات الموجودة في شاشة المخرجات (الشكل (10-2) :

أيقونة Pause تستخدم لإيقاف عملية سرد المخرجات (النتائج) .

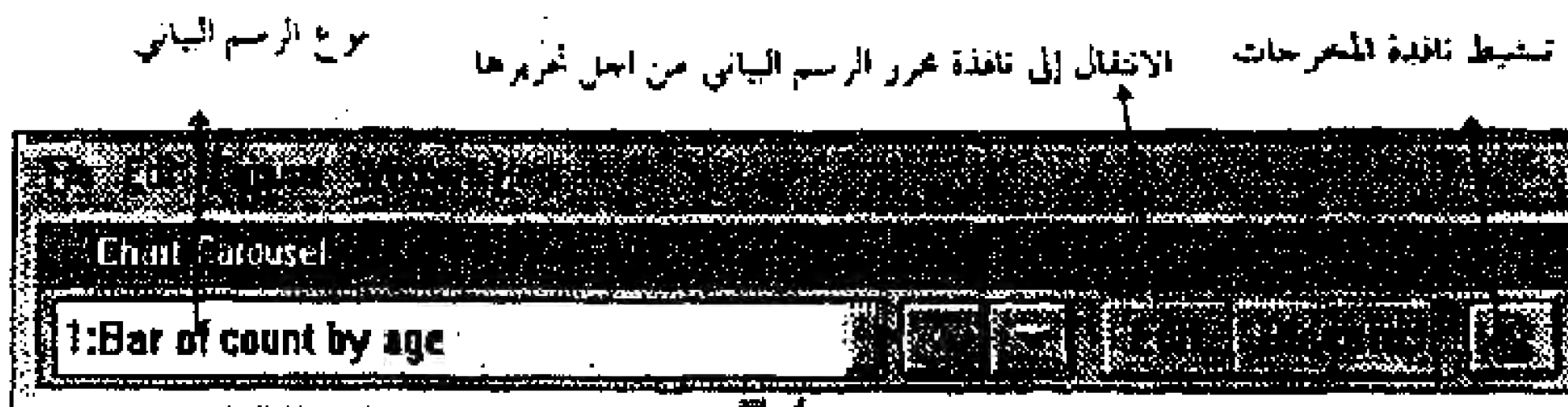
أيقونة Scroll تستخدم لمتابعة سرد النتائج على الشاشة .

أيقونة Round تستخدم لتقريب المنازل العشرية (أو حسب الرقم الذي حدد في مربع حوار Round من قائمة Edit).

أيقونة Glossary تستخدم لإيجاد مسرد بالكلمات العسيرة مع شرح لها .

أيقونة Chart Button تستخدم لإيجاد High-Resolution وربطها مع محرر الرسم البياني Chart Carousel .

3- شاشة نوافذ التخطيط Chart Carousel : وهي الشاشة التي يمكنك من تخزين ومعاينة الرسومات البيانية التي أنشئت باستخدام تطبيق SPSS انظر الشكل (10-3)



الشكل (10-3) نافذة Chart Carousel

4- شاشة الرسم البياني Chart window : يمكنك في هذه الشاشة أن تخزن وتعديل الرسم البياني الذي أنشأته بواسطة تطبيق SPSS فيمكنك تغيير الألوان

وعناوين المحاور وإضافة وسيلة إيضاح وحتى تغير نوع الرسم البياني (مثلا من أعمدة إلى دائري) .

لاحظ انه يجب حفظ كل شاشة بعد الانتهاء من العمل بها.

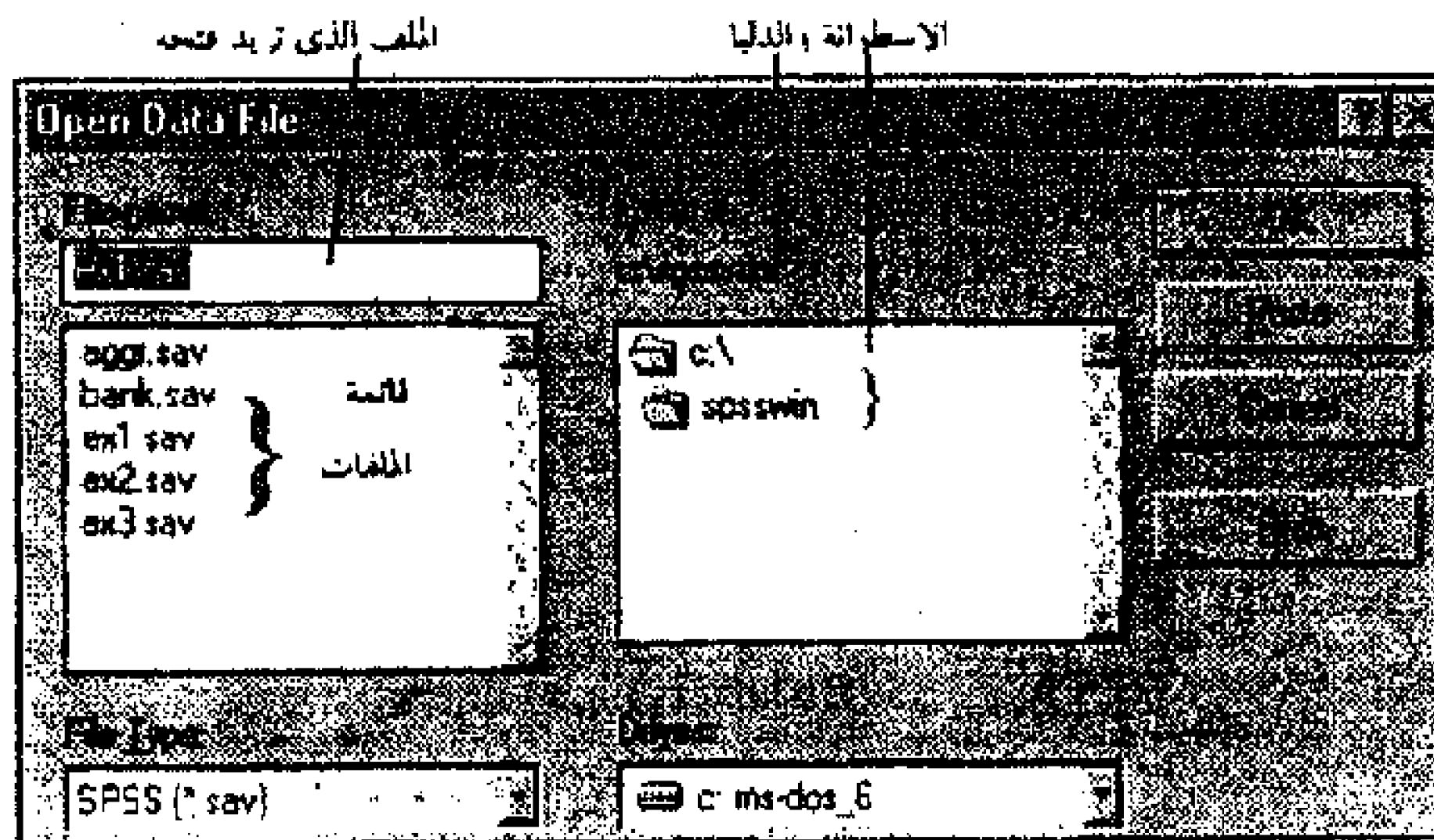
#### 10-4 فتح ملف بيانات مخزن open.

يمكنك فتح ملف بيانات قد عملت به مسبقا لإجراء التعديلات عليه أو الإطلاع عليه أو لإجراء عمليات إحصائية جديدة وذلك بإتباع الخطوات التالية :

1- اختر الأمر ملف File من شريط اللائحة وانقر فوق أمر فتح Open من القائمة الفرعية انقر فوق Data .

2- من مربع الحوار Open Data File حدد الملف الذي تريد فتحه من قائمة الملفات فيظهر ذلك في مربع File name ثم اختر الأمر OK كما هو موضح في الشكل (10-4)

لاحظ انك تستطيع فتح ملفات التخطيط بالنقر فوق Chart أو بالنقر على Output لفتح ملفات المخرجات وذلك بدلا من النقر فوق Data .



الشكل (10-4) مربع حوار فتح ملف بيانات مخزن

## 10-5 إدخال البيانات Entering Data .

يمكنك إدخال في شاشة محرر البيانات New Data وذلك بإتباع ما يلي :

- 1- اختر الخلية الأولى (رقم 1) فتظهر حدود خارجية حول الخلية إشارة إلى أن هذه هي الخلية نشطة حيث يظهر اسم المتغير ورقم الزاوية اليسرى العليا من نافذة محرر البيانات كما في الشكل (10-5)

- 2- ادخل القيمة ثم اضغط مفتاح الإدخال Enter.

القيمة المراد إدخالها في الخلية

اسم للمتغير ورقم الصف

New Data				
1	2	3	4	5
1.00				

الشكل (5-7) إدخال البيانات في نافذة محرر البيانات

## 10-6 إدراج متغير (عمود) Insert variable .

يمكنك إضافة عمود في الموقع الذي تحدده وذلك بإتباع الخطوات التالية :

- 1- ضع مؤشر الفأرة على العمود الذي تريد إضافة عمود جديد قبله .
- 2- من قائمة بيانات اختر الأمر Insert variable فيظهر عمود فارغ يحتوي على اسم يعطيه SPSS مثل VAR 0001 يمكنك تغييره كما ستتعلم لاحقاً .

## 10-7 إدراج صف (حالة) Insert Case .

لإضافة صف جديد إلى جدول البيانات اتبع ما يلي :

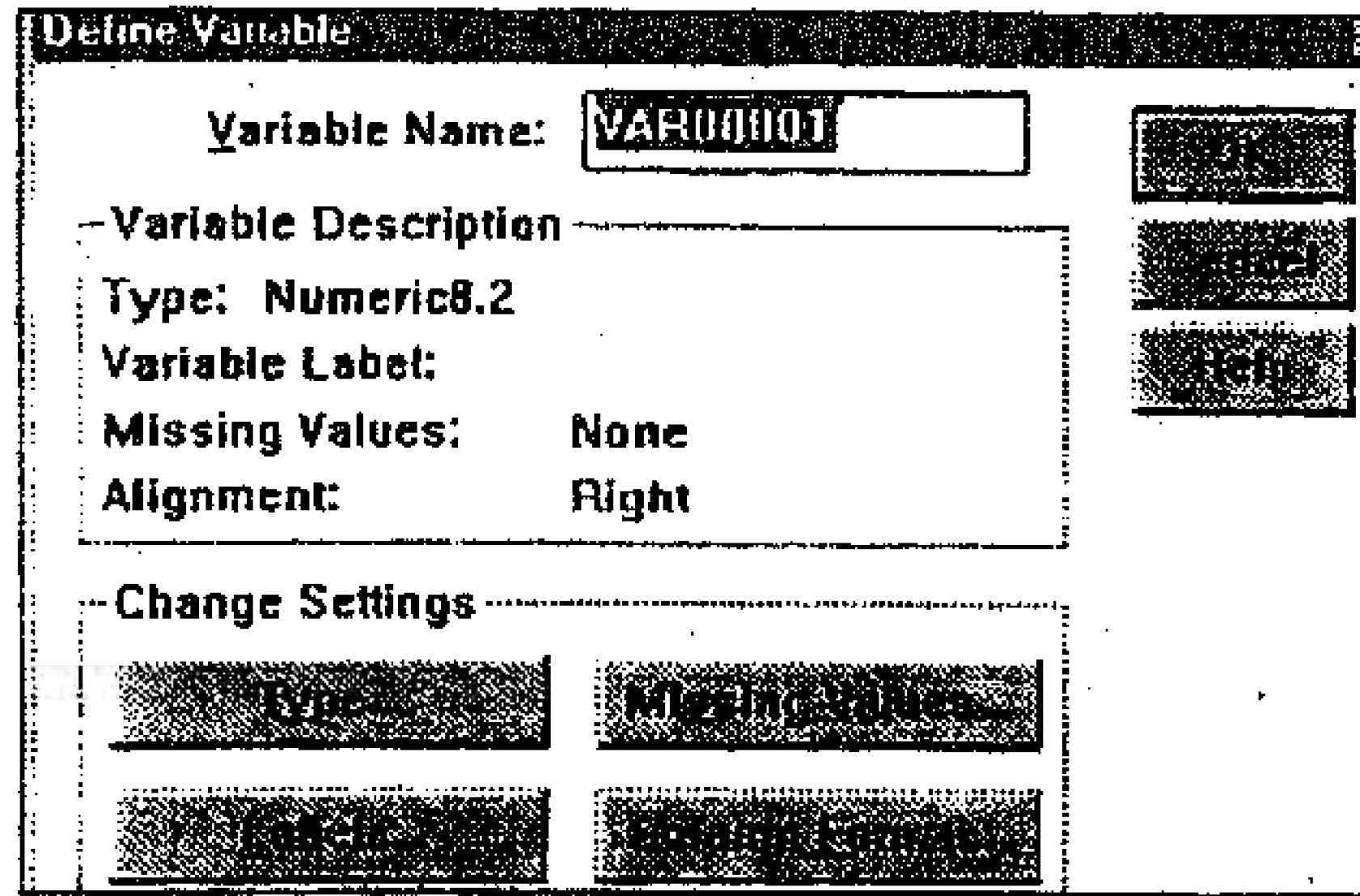
- 1- ضع مؤشر الفأرة على الصف الذي تريد إضافة صف جديد فوقه .
- 2- من قائمة بيانات Data اختر الأمر Insert Case فيظهر صف فارغ يحتوي على رقم إلى جانبه .

## 10-8 تغيير اسم المتغير Rename Variable Name .

يعطي تطبيق SPSS وبشكل تلقائي اسماً للمتغير (العمود) ولكن يمكنك تغيير هذا الاسم وإعطائه الاسم المناسب الذي تريد وذلك بإتباع ما يلي :

1- اختر أية خلية في ذلك العمود .

2- اختر الأمر Define variable من قائمة البيانات Data menu أو بالنقر المزدوج على اسم المتغير في عنوان العمود فيظهر مربع حوار Define variable كما الشكل (10-6) كذلك يمكنك اختيار الأمر Define Variables عندما تكون شاشة محرر البيانات نشطة ومنها يمكنك تعريف متغيرات جديدة أو تغيير التنسيق للمتغيرات الموجودة من قبل .



الشكل (10-6) مربع الحوار Define Variables

3- اكتب اسم المتغير في مربع variable name لاحظ أن SPSS يعطيك اسماً تلقائياً مثل VAR00001 كما هو موضح في الشكل (10-7) وعليك هنا أن تتجنب التسمية بنفس الاسم أو فيه مثل (VAR002) كذلك عليك أن تتجنب محاولة تغيير نوع هذه الأسماء كما عليك أن تتجنب إعطاء أسماء تبدأ بإشارة \$ (مثل ( كذلك الأسماء التي تنتهي ب ( \_ ) (مثل MONTH\_ أو FILTER\_\$ ) .

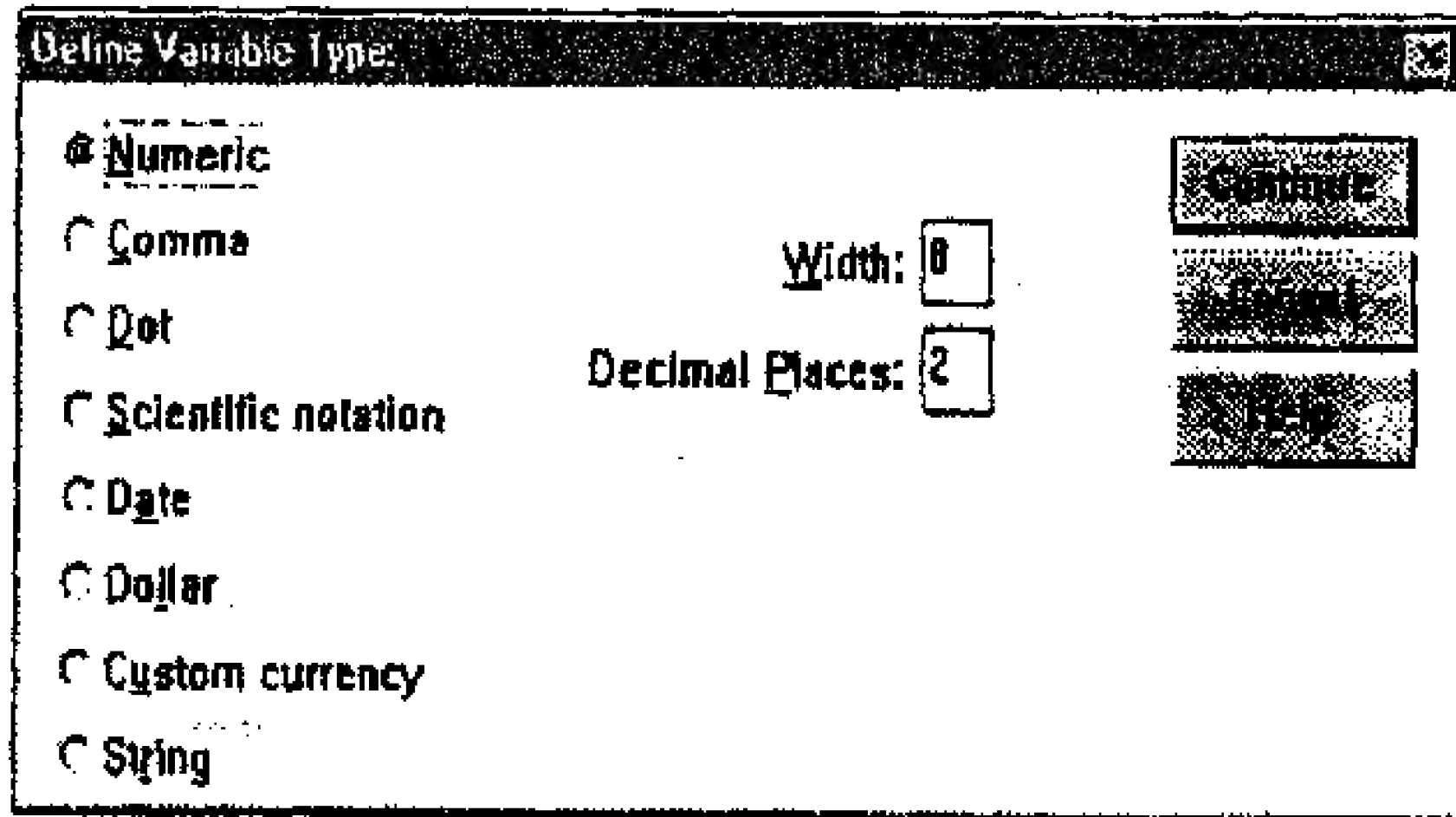


### 10-8-1 تغيير النوع أو التنسيق الحالي Variables Type .

يمكنك التحكم بشكل أسماء المتغيرات وتنسيق البيانات المدخلة إلى شاشة محرر البيانات مثل تحديد عدد الفواصل العشرية أو إضافة إشارة الدولار \$ للعملة وذلك باتباع الخطوات التالية :

1- انقر فوق الخيار Type من مربع حوار Define Variables فيظهر مربع حوار Type كما في الشكل (10-7)

2- اختر الخيار الذي تريد لتحديد نوع المتغير المطلوب حيث يوفر SPSS خيارات متعلقة للمتغيرات مثل رقمي Numeric فاصلة عشرية Comma وذلك لاستخدام الفاصلة العشرية مع القيسم الرقمية والنقطة Dot والتاريخ Data وإشارة الدولار Dollar .



الشكل (10-7)؛ مربع حوار Define Variable Type

ويستخدم مربع العرض Width لتحديد عدد الخانات كما يستخدم مربع الخانات العشرية Decimal Places للتحكم في عدد المنازل إلى يمين الفاصلة أو النقطة .

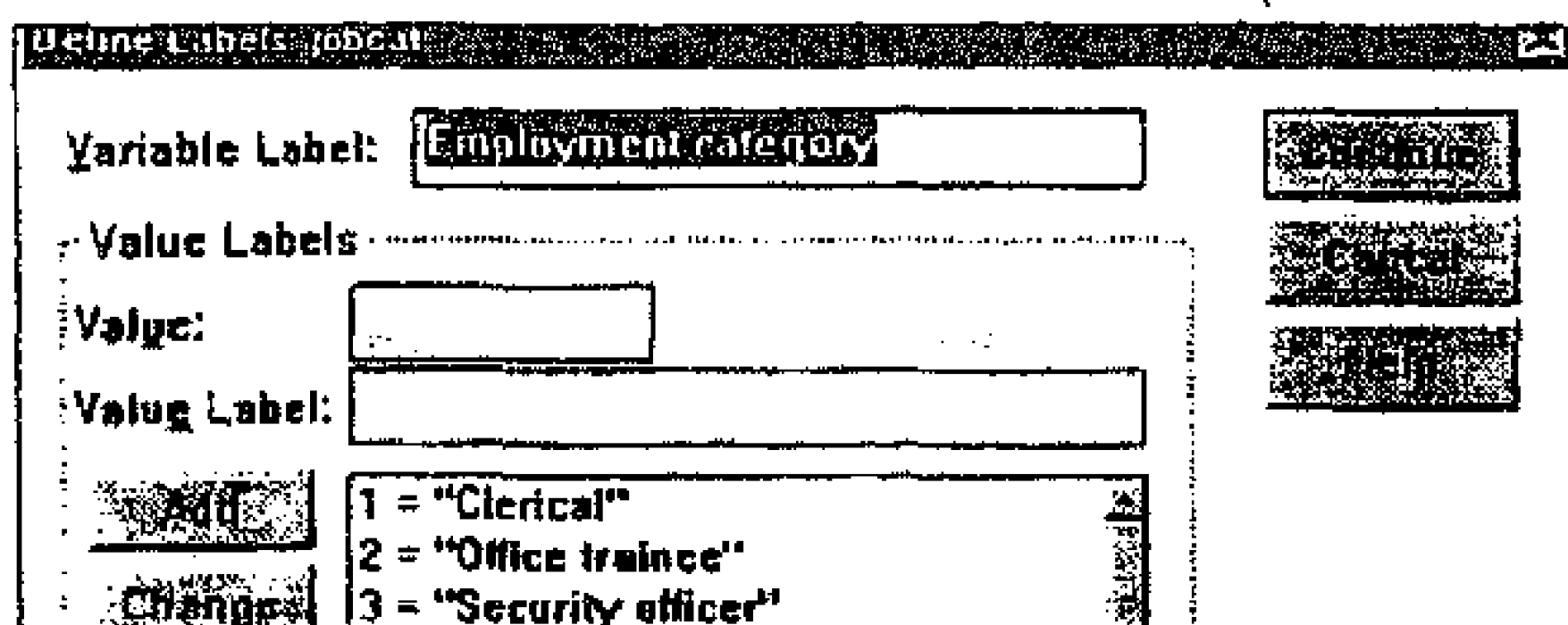
### 10-8-2 تحديد عنوان المتغير Variable Label .

يمكنك إعطاء قيم لعناوين المتغيرات Variable Label وبالتالي استخدام هذه

القيم عند إدخال البيانات بدلاً من طباعة العناوين فمثلاً إذا أردت أن يشير الرقم 1 إلى Clerical والرقم 2 إلى Office Trainee والرقم 3 إلى Security Officer عليك اتباع الخطوات التالية :

1- من مربع الحوار Define Variables تستطيع تحديد عنوان المتغير وذلك بالنقر فوق variable label فيظهر مربع حوار Labels Define كما في الشكل (10-8).

2- أدخل القيم لعناوين المتغيرات كما هو موضح في الشكل (10-8) في مربع value فمثلاً رقم 1، 2، 3.



الشكل (10-8) مربع حوار Define Labels

- 3- في مربع value label اكتب العنوان الذي تريد مثلاً Clerical.
- 4- اختر add لتثبيت القيمة كما يمكنك إزالة remove أو تغيير العنوان change بالنقر على الزر المناسب بعد تحديد العنوان الذي تريد إزالته أو تغييره.
- 5- والآن يمكنك إضافة الأرقام حسب تصنيفك لها بدلاً من الكتابة الحرفية فمثلاً الرقم 1 يشير إلى Clerical وبذلك يفهم الرقم حسب تصنيفك أعلاه كما في الشكل (10-9).

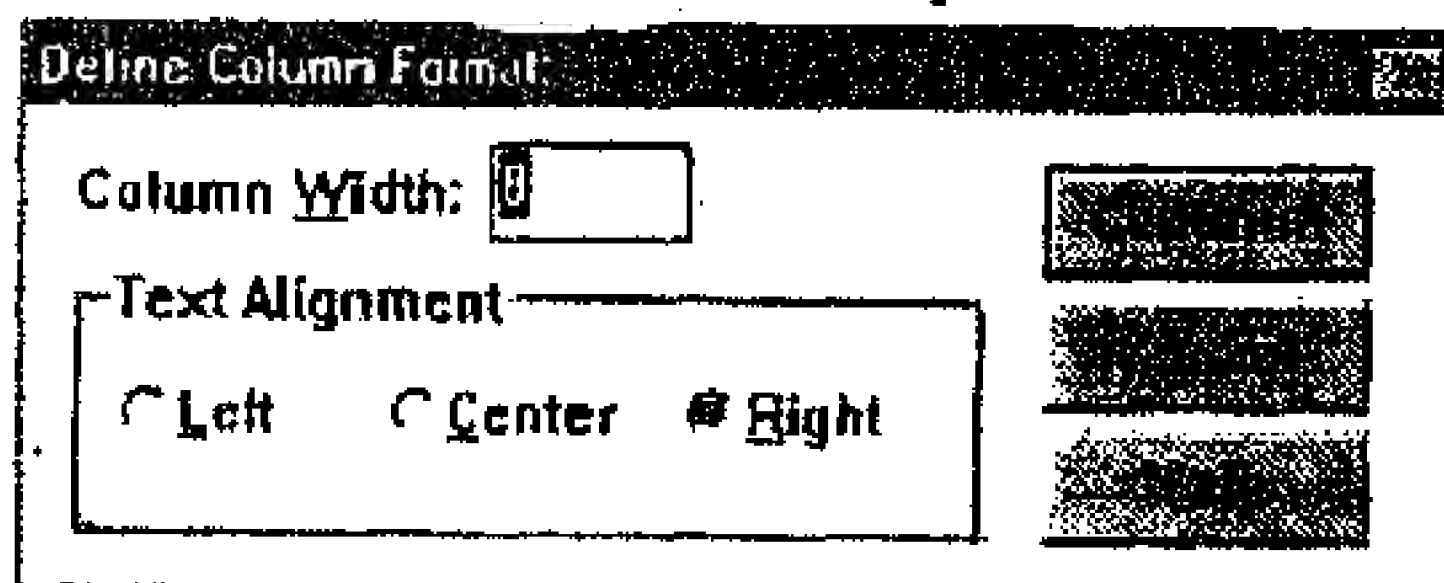
5:minority		0		
	jobcat	minority	sexrace	age
1	4	0	1	
2	5	0	1	
3	1	0	1	
4	2	0	1	
5	3	0	1	

الشكل (10-9) نافذة محرر البيانات بعد إدخال البيانات إليها

### 10-8-3 تنسيق الأعمدة Column format .

لتغير شكل القيم في شاشة محرر البيانات (عرض العمود محلذاة النص) اتبع ما يلي:

- 1- أنقر فوق column format من مربع حوار Define Variables فيظهر مربع حوار column format كما في الشكل (10-10)



الشكل (10-10) مربع حوار تنسيق العمود

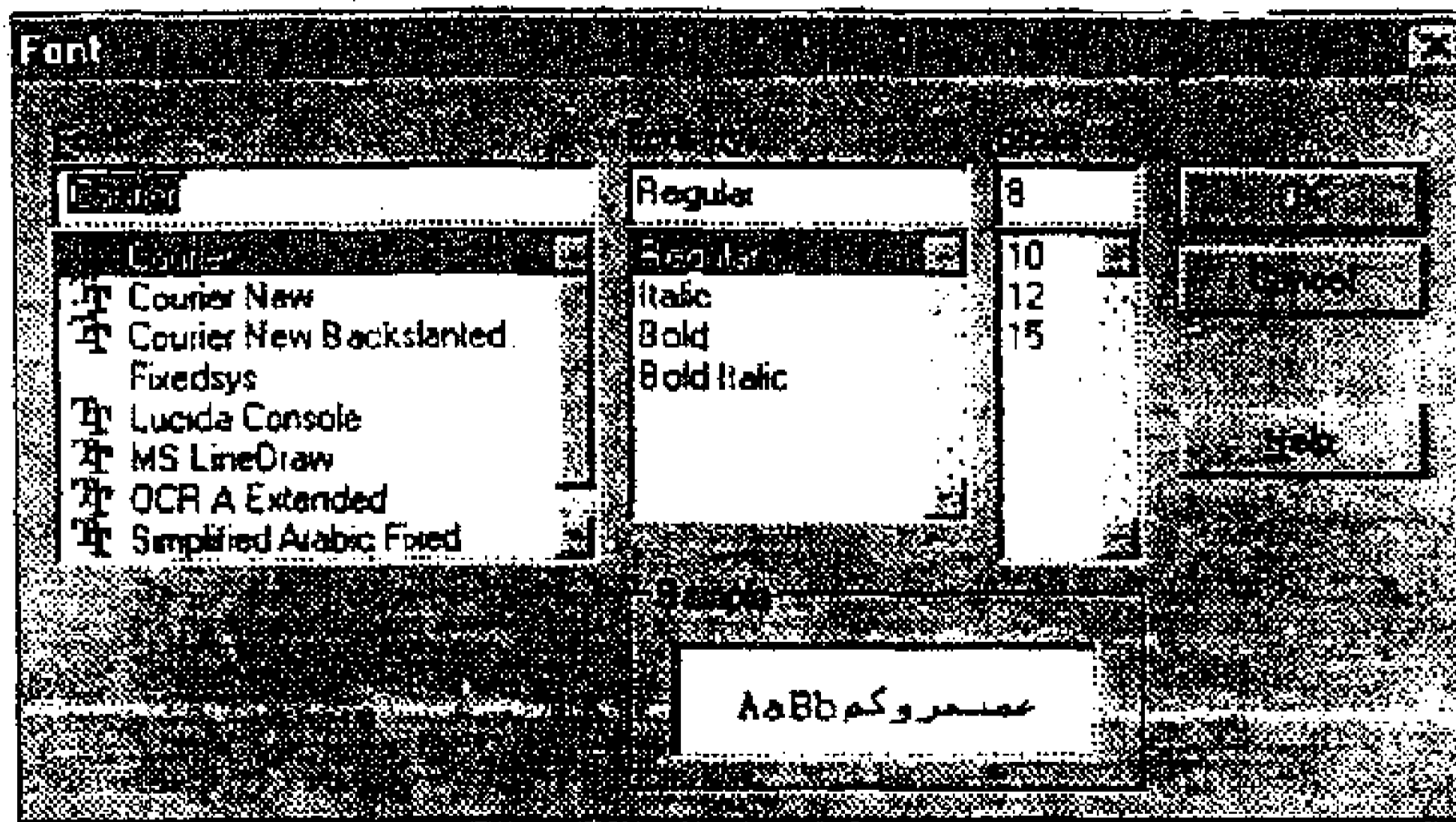
- 2- يمكنك زيادة أو إنقاص عرض الأعمدة بتحديد العرض الذي تريد في مربع column width .

- 3- كما يمكنك تحديد محلذاة النص إلى اليمين Right أو إلى اليسار Left أو في الوسط Center وذلك بالنقر على الخيار الذي تريد انظر الشكل (10-11)

## 10-9 تغيير نمط البيانات Fonts

يمكنك تغيير نوع الخط للبيانات سواء كان في شاشة محرر البيانات أو في شاشة المخرجات وذلك بتحديد البيانات المراد تغيير خطها Fonts وذلك اما بواسطة الفارة أو بالاختيار الأمر Select من قائمة Edit .

1- انقر فوق الأمر Fonts من قائمة Utilities فيظهر مربع حوار Fonts كما في الشكل (10-11)



الشكل (10-11) مربع حوار Fonts

2- حدد نمط الخط الذي تريد غامق Bold ، أو مائل Italic ، أو عادي Regular ، أو غامق مائل Bold italic وذلك من مربع Font Style

3- حدد الحجم الخط وذلك من مربع Font Size

4- انقر موافق OK .

## 10-10 حذف المتغير (العمود) Delete Variable

لحذف عمود أو أكثر بما يحتويه من بيانات ، حدد Select عنوان العمود بالنقر على اسم المتغير في أعلى العمود واحذفها اما بالنقر فوق Clear من قائمة تحرير Edit أو بالضغط على Delete من لوحة المفاتيح .

### 10-11 حذف الحالة (صف) Delete Case .

لحذف صف أو أكثر بما يحتويه من بيانات ، حدد الصف Select Row وذلك بالنقر على رقم الصف في الجانب الأيسر من الصف اضغط Delete في لوحة المفاتيح أو اختر Clear من قائمة Edit .

### 10-12 نقل أو نسخ خلية إلى خلية أخرى Move Or Copy .

يمكنك نسخ بيانات متغير أو حالة إلى مكان جديد وبالتالي الحصول على نسختين متطابقتين من البيانات أو نقل بيانات خلية إلى موقع آخر وذلك باتباع الخطوات الآتية :

- 1- حدد المتغير (العمود) أو الحالة (الصف) التي تريد قصها أو نسخها .
- 2- اختر الأمر Cut للنقل أو Copy للنسخ من قائمة Edit .
- 3- انتقل إلى الخلية التي تريد نقل أو نسخ البيانات إليها .
- 4- انقر فوق paste من قائمة Edit .

### 10-13 إنشاء ملف بيانات New Data File .

لا نشاء ملف بيانات جديد انقر فوق Data من القائمة الفرعية للأمر New من قائمة ملف File .

### 10-14 حفظ البيانات Saving Data .

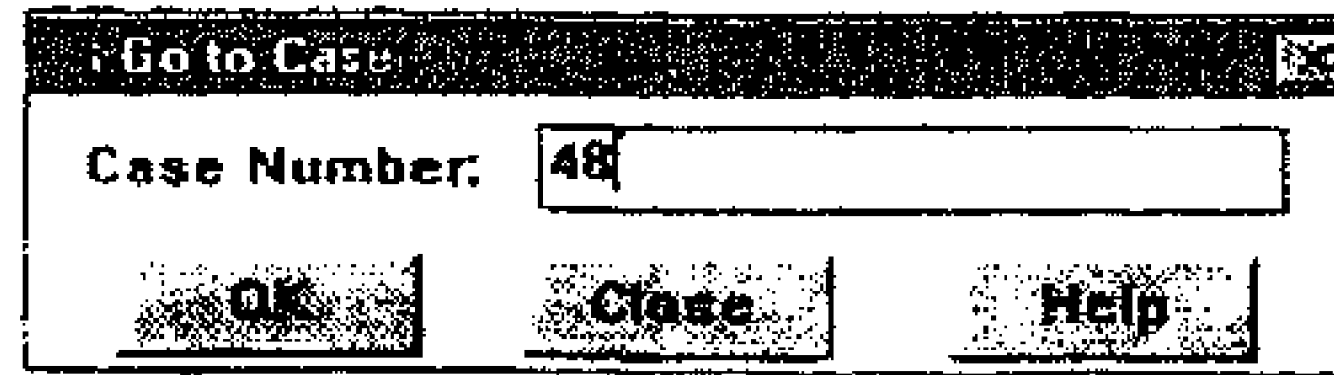
لحفظ البيانات اختر الأمر Save من قائمة ملف File ولا بد أن تكون شاشة محرر البيانات نشطة لحفظها .

### 10-15 الانتقال إلى مكان معين في شاشة محرر البيانات Go To .

إذا رغبت في الانتقال إلى صف معين في ملفك في شاشة محرر البيانات اتبع ما يلي :

- 1- انقر فوق الأمر Go To من قائمة Data فيظهر مربع الحوار Go To case كما في الشكل (10-12)

2- في مربع Case Number أكتب رقم السطر الذي ترغب في الانتقال إليه.



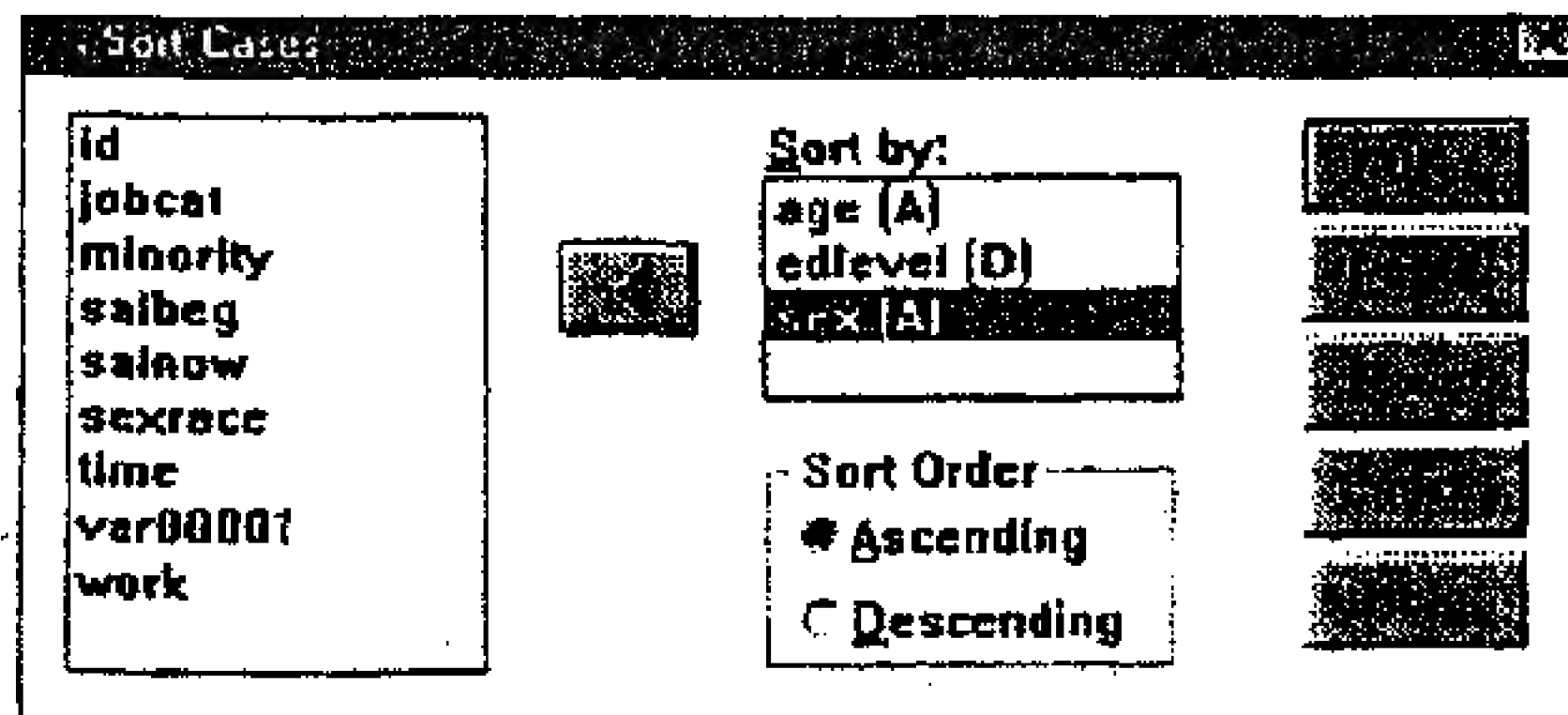
الشكل (10-12) مربع حوار Go to Case

3- اختر موافق OK .

### 10-16 فرز بيانات الصفوف Sort cases .

يمكنك فرز البيانات المدخلة في الحالة (الصف) وذلك باتباع الخطوات الآتية:

1- انقر فوق Sort Case من قائمة Data فيظهر مربع حوار كما في الشكل (10-13).



الشكل (10-13) مربع حوار Sort Cases

2- اختر المتغير الذي تريد التصنيف عليه . وانقر على السهم القريب من مربع Sort By .

3- في مربع Sort order اختر Descending من أجل ترتيب تنازلي (من الأكبر إلى الأصغر) وللأرقام من Z-A ويشار إليها بالحرف (D) إلى جانب المتغير أما إذا اخترت Ascending الذي يشار إليها بالحرف (A) إلى جانب المتغير فإن الترتيب يكون تصاعدياً (من الأصغر للأكبر) .

4- كما يمكنك إجراء الفرز على أساس عدة متغيرات وذلك باختبار المتغير وتحديد نوع الترتيب الذي تريده لذلك المتغير .

5- اختر موافق OK .

### تمرين (10-1)

لديك سلعتين سلعة (X) وسلعة (Y) ادخل البيانات التالية لكل من السلعتين .

X	Y
3	2
7	3
-7	-1
2	0
2	1

1- أجعل البيانات في الوسط ولا تحتوي على منازل عشرية ونمط الخط غامق .

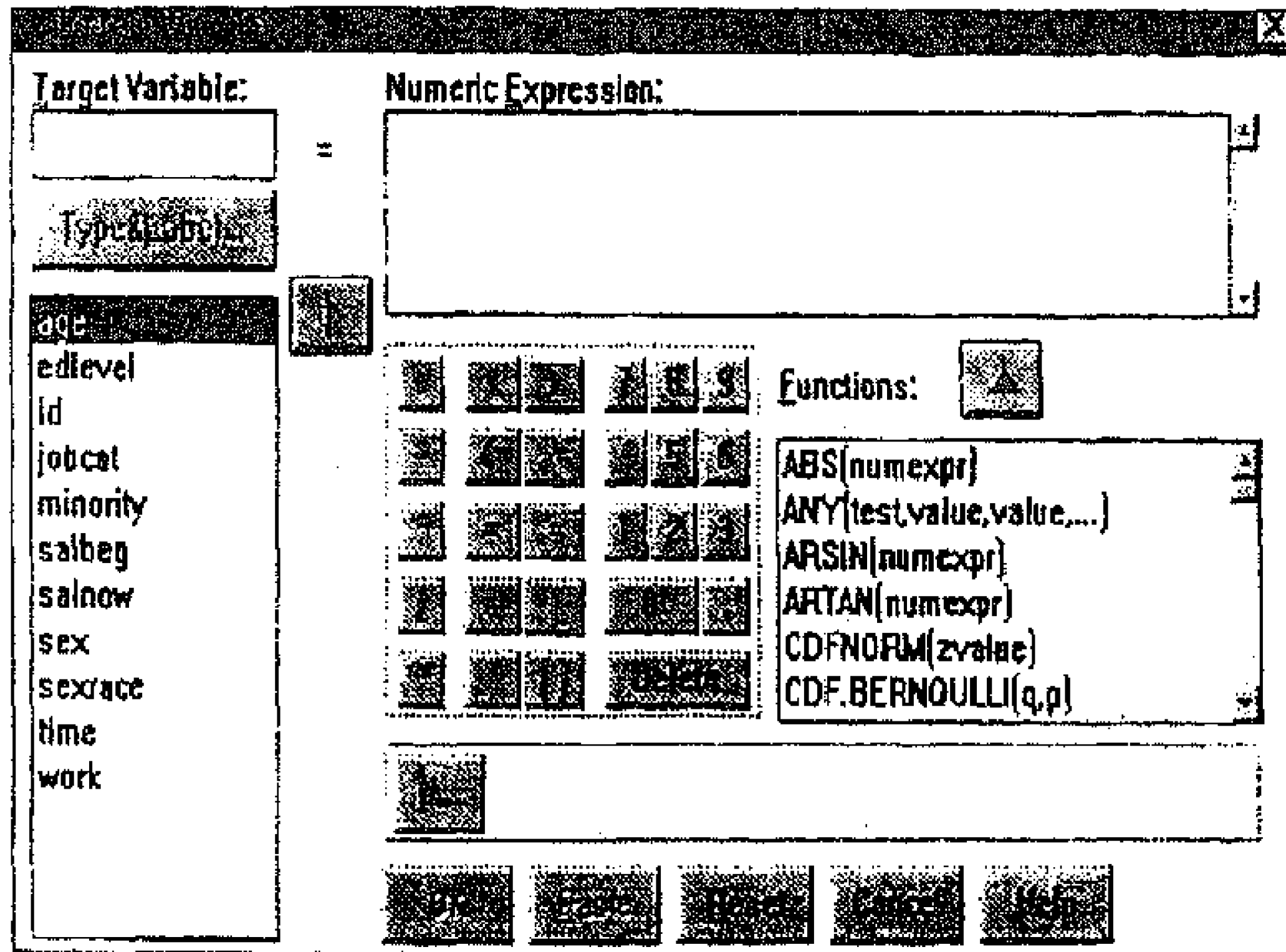
2- ادرج عمود جديد Z .

3- انسخ بيانات العمود X إلى العمود Z .

4- خزن الملف باسم Exe-1 .

### 10-17 العمليات الحسابية Compute .

تستطيع باستخدام SPSS تعريف متغيرات جديدة وحساب قيمها من خلال القيم المخزنة وبالنقر فوق الأمر Compute من قائمة Transform يظهر مربع حوار Compute كما في الشكل (10-14)



الشكل (10-14) فيظهر مربع الحوار Compute

أطبع اسم المتغير الجديد في مربع Target Variable ثم انتقل إلى المربع Numeric Expression لإدخال معادلة حساب المتغير الجديد وتستطيع كتابة هذه المعادلات إما عن طريق لوحة المفاتيح أو باستخدام الآلة الحاسبة Calculator الموجودة على نفس الشاشة كذلك باستطاعتك استخدام الدوال الرياضية Functions أو استخدام العلاقات المنطقية من خلال جملة IF المثال التالي يوضح كيفية استخدام أمر Compute .

افترض أنك أدخلت بيانات تخص موظفي إحدى الشركات ومخزنة كما في

الشكل (10-15)



	id	hours	age	salary	net
1	628	30	29	200	
2	630	60	40	320	
3	632	45	31	300	
4	633	55	36	400	
5	635	60	42	350	

الشكل (10-15) بيانات الموظفين

هذه البيانات عبارة عن رقم الموظف ID وعدد ساعات العمل hoursw والعمر Age والراتب Salary فإذا أردنا أن نحسب صافي الراتب Netsal بعد اقتطاع الضريبة (5 في هذا المثال) فإننا ننقر على Compute من قائمة Transform ثم ندخل اسم المتغير Netsal في مربع Target Variable ونكتب معادلة حساب صافي الراتب في مربع Numeric Expression كما في الشكل (10-16) ولنختار OK.

Compute Variable	
Target Variable:	Numeric Expression:
netsal	salary - (0.05 * salary)
Type & Label...	

شكل (10-16) معادلة حساب صافي الراتب

نتيجة لذلك نجد أن عموداً جديداً باسم Netsal قد ظهر ويحتوي على صافي الراتب لكل موظف كما في الشكل (10-17)

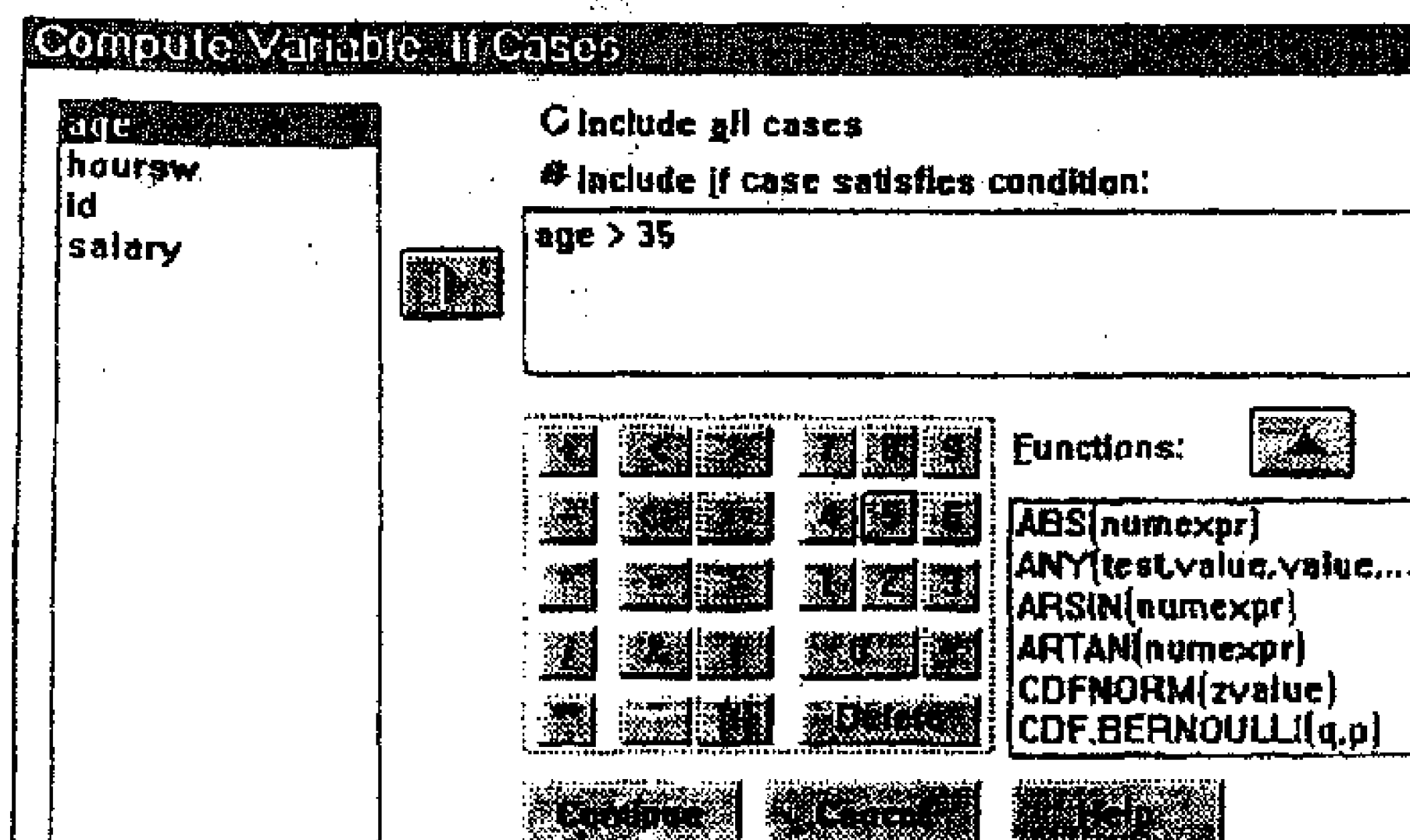
	id	hours	age	salary	net
3	632	45	31	300	285.00
4	633	55	36	400	380.00
5	635	60	42	350	332.50
6	637	40	30	200	190.00

### شكل (10-17) ناتج عملية خصم الضريبة

كذلك فانك تستطيع استخدام العلاقات المنطقية أو شرط If إذا أردت تخصيص عملية معينة على بعض الحالات. فمثلاً، إذا أردت زيادة رواتب الموظفين الذين تزيد أعمارهم على 35 سنة بمقدار 2% في متغير جديد اسمه add2، فعليك إتباع الخطوات التالية:

1- انقر على مربع If لتنتقل إلى شاشة If شكل (10-18) في مربع الحوار Variable Compute وضع الشرط وهو  $age > 35$ .

2- انقر على Compute لتعود إلى الشاشة الأولى وتدخل اسم المتغير الجديد Add2 في مربع Variable Target وكذلك معادلة زيادة الراتب في المربع Numeric Expression ونختار OK كما هو في الشكل (10-19)



الشكل (10-18) شاشة IF

**Compute Variable**

Target Variable: **add2** = Numeric Expression: **salary + (0.02 \* salary)**

Type & Label

age  
hoursw  
id  
salary

Functions:

ABS(numexpr)  
ANY(test,value,value,...)  
AR SIN(numexpr)  
ARTAN(numexpr)  
CDFNORM(zvalue)  
CDF.BERNOULLI(q,p)

age > 35

الشكل (10-19) كتابة معادلة إضافة الراتب

سوف تظهر شاشة محرر البيانات والتي تحتوي على العمود Adds كما في الشكل (10-20) لاحظ أن زيادة الراتب قد حدثت فقط للذين تجاوزت أعمارهم 35 سنة.

Case	id	hours	age	salary	add2	hours
1	628	30	28	200		
2	630	60	40	320	326.40	
3	632	45	31	300		
4	633	55	36	400	408.00	
5	635	60	42	350	357.00	

الشكل (10-20) زيادة الرواتب للذين أعمارهم فوق 35 سنة

أما إذا كان Target Variable قيمة غير رقمية عندما يجب اختبار Type & Label لتحديد طول المتغير ومن متابعة الخطوات كما هو اعلاة.

## 10-18 الارتباط Correlation .

يبين الارتباط Correlation العلاقة بين . والارتباط يكون بسيطاً Bivariate Correlation إذا كانت العلاقة بين متغيرين فقط ويكون جزئياً Partial Correlation في حالة وجود ارتباط بين أكثر من متغيرين . وتستخدم معاملات لقياس الارتباط تسمى معامل الارتباط تصف العلاقة بين المتغيرات ومدى قوة وضعف العلاقة بين هذه المتغيرات وتقع قيمة معامل الارتباط بين  $-1$  و  $+1$  فإذا كان مقياس الارتباط يقيس العلاقة بين وقيمة معامل الارتباط تساوي صفراً فهذا يعني أنه لا توجد أي علاقة بين المتغيرين وكلما قارب قيمة معامل الارتباط من  $+1$ ، كانت العلاقة بين المتغيرين قوية وكلما قربت من  $-1$  كلما كانت العلاقة عكسية (أي إذا كان أحد المتغيرين يزداد فإن الثاني ينقص) وهناك عدة معاملات للارتباط أشهرها معامل بيرسون ومعامل سبيرمان وباستطاعتنا استخدام هذه المعاملات مع تطبيقات SPSS .

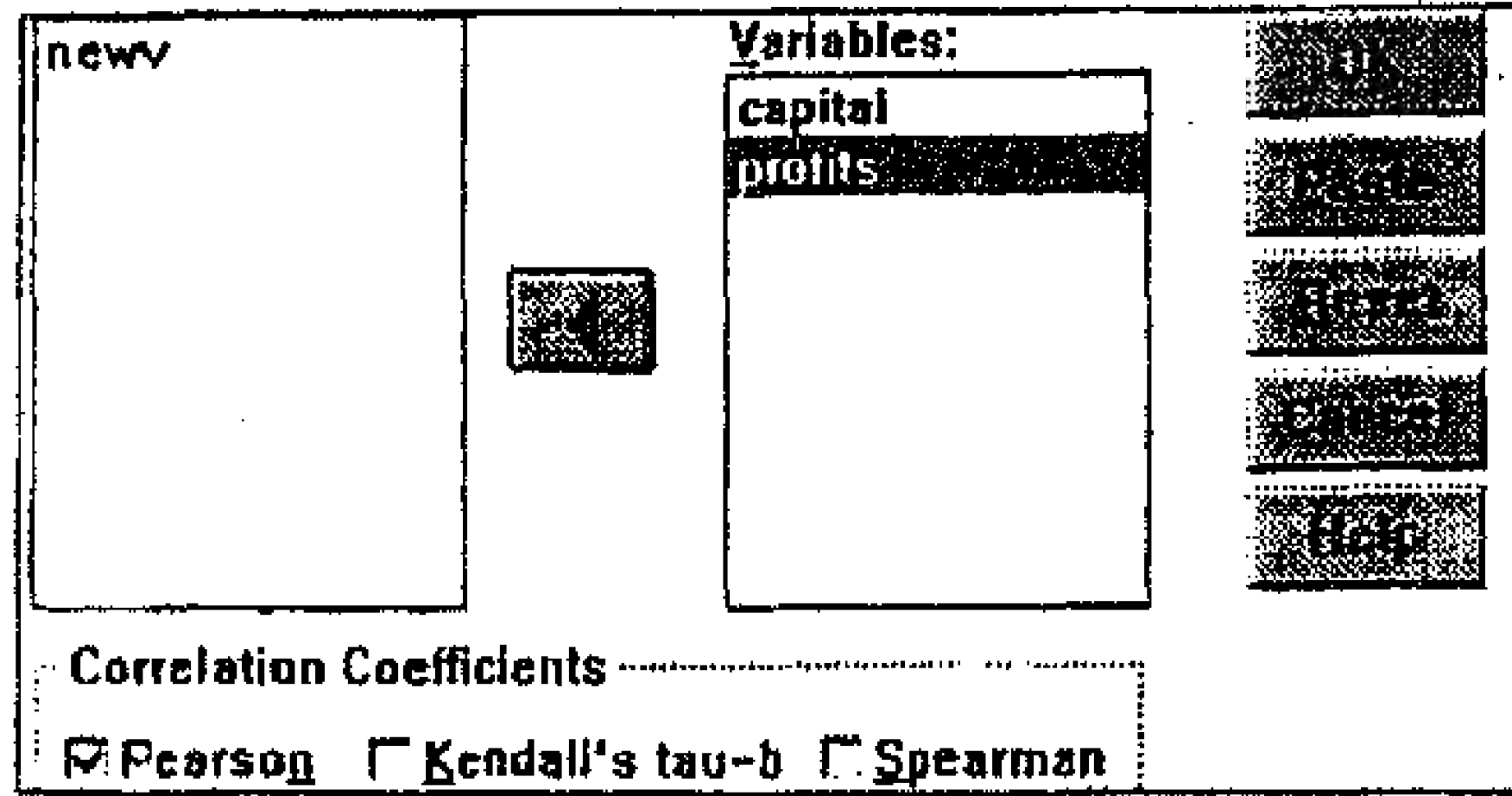
مثال : احسب معامل الارتباط بين راس المال Capital والأرباح Profits للبيانات الموجدة في الشكل (10-21)

Capital	Profits
10	1.2
15	2.0
5	.8
30	4.0
25	2.7
27	3.1
7	.9
18	2.2
45	5.8
38	4.3

الشكل (10-21) شاشة محرر البيانات

يستطيع حساب الارتباط بإتباع الخطوات التالية :

- 1- انقر فوق Correlate من قائمة Statistics ومنها اختر Bivariate التي تحسب معامل بيرسون ومعامل سيرمان فيظهر مربع حوار Bivariate Correlation كما في الشكل (10-22)



الشكل (10-22) مربع حوار Bivariate Correlation

- 2- اختر على الأقل متغيرين ( Capital و Profits في المثال ) .
- 3- من مربع Correlation Coefficients يمكنك من اختيار نوع معامل الارتباط ( في المثال تم اختيار معامل بيرسون Pearson ) .
- 4- انقل المتغيرات Profits Capital إلى مربع Variables وذلك بالنقر فوقها لتظليلها ونقلها بالنقر على السهم .
- 5- اختر الأمر options لاختيار المزيد من العمليات الإحصائية ( اخترنا في هذا المثال الوسط الحسابي Mean و الانحراف المعياري Standard Deviation ) .
- 6- ثم اختر Continue لتعود إلى الشاشة الأولى ومنها اختر OK سوف تجد النتيجة في شاشة المخرجات كما في الشكل (10-23)



مثل (3-10)

احسب معامل الارتباط بين الذكاء IQ والتحصيل في الرياضيات Mark وذلك بالاعتماد على الجدول التالي :

1- باستخدام معامل ارتباط بيرسون .

2- باستخدام معامل ارتباط سيرمان .

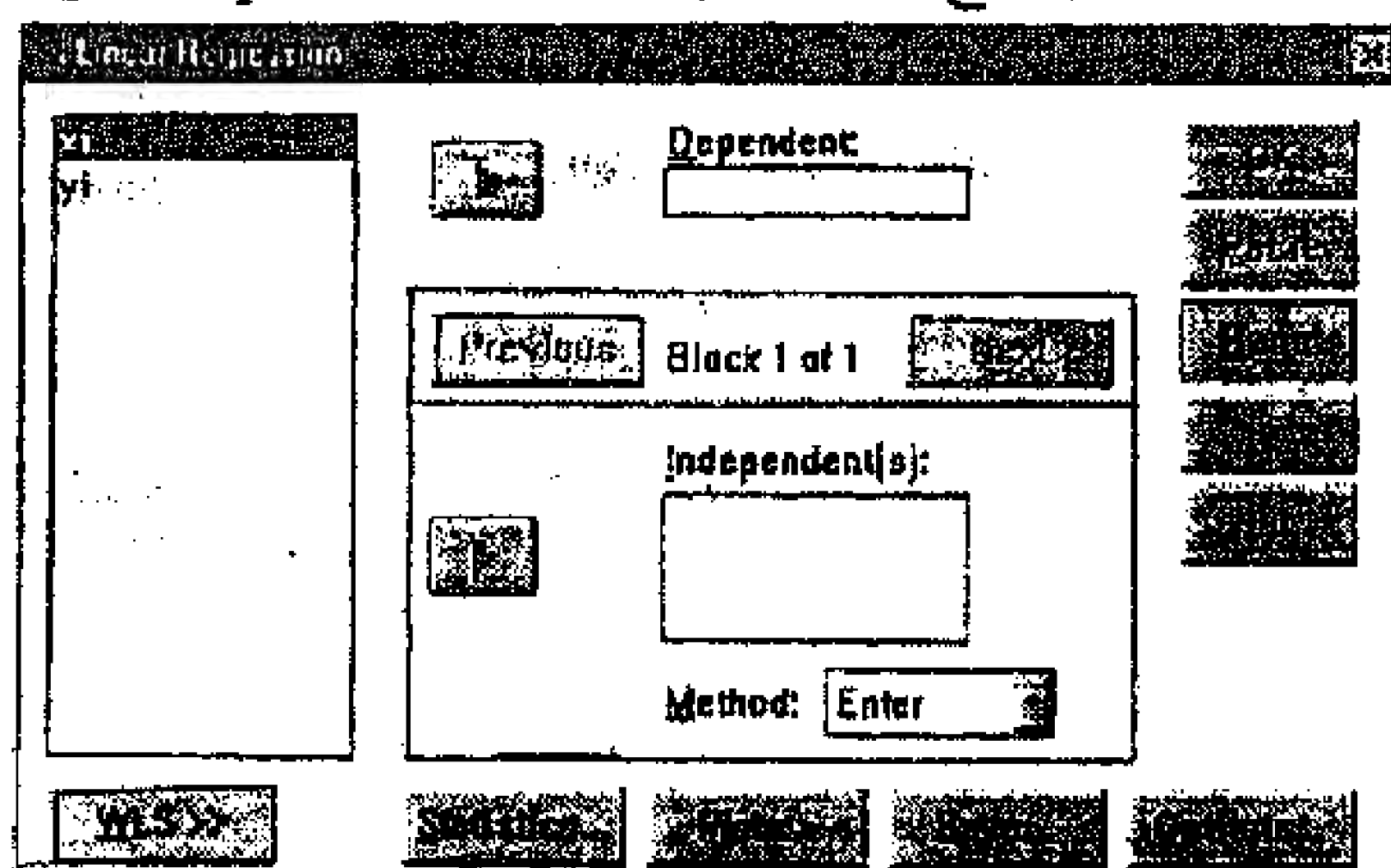
3- احفظ التمرين باسم Exer 3 .

IQ	110	120	103	100	130	115
Mark	80	70	40	50	95	85

10-19 معادلة الانحدار الخطي Linear Regression .

لايجاد معادلة الانحدار الخطي اتبع الخطوات التالية :

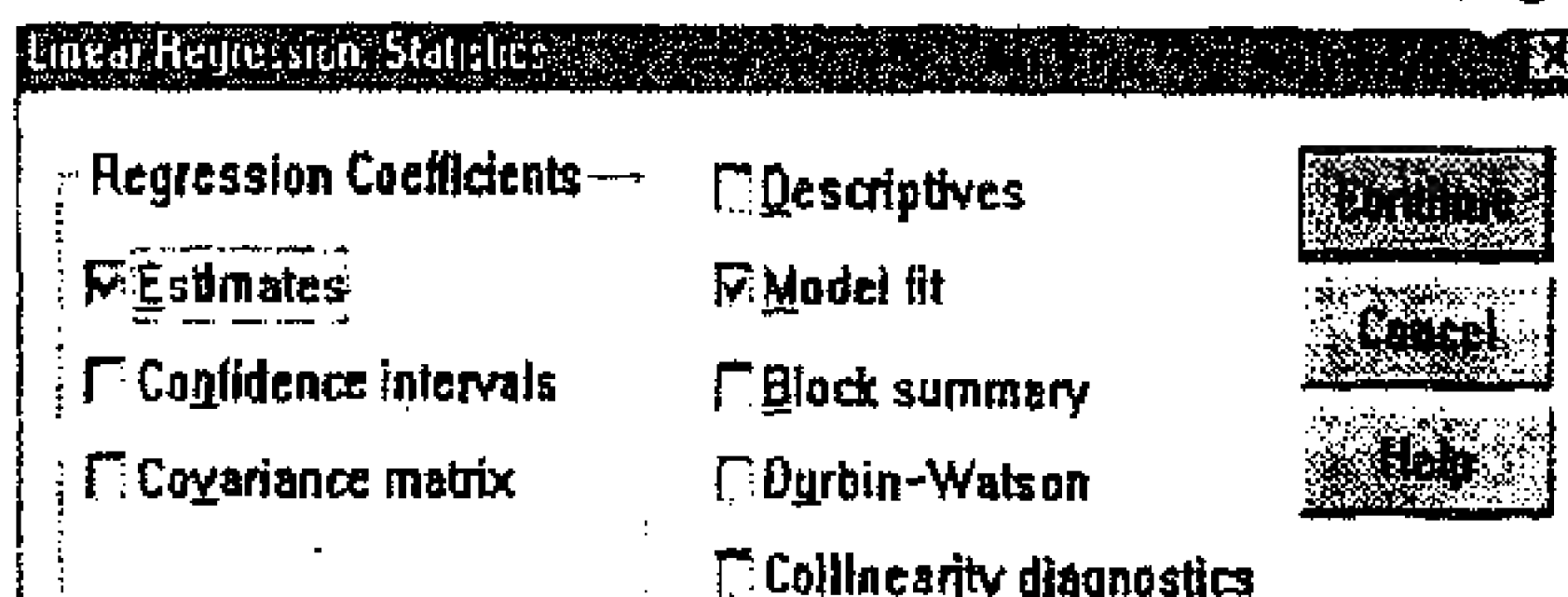
1- اختر الأمر Regression من قائمة Statistics. ومن قائمة الفرعية انقر فوق الأمر Linear ليظهر مربع حوار Linear Regression كما في الشكل (24-10)



الشكل (24-10) مربع حوار Linear Regression

2- انقل المتغير التابع Dependent والمستقل إلى مربع Independent وذلك باستخدام الأسهم اعلاه .

3- انقر فوق Statistics فيظهر مربع حوار Linear Regression Statistics كما في الشكل (10-25)

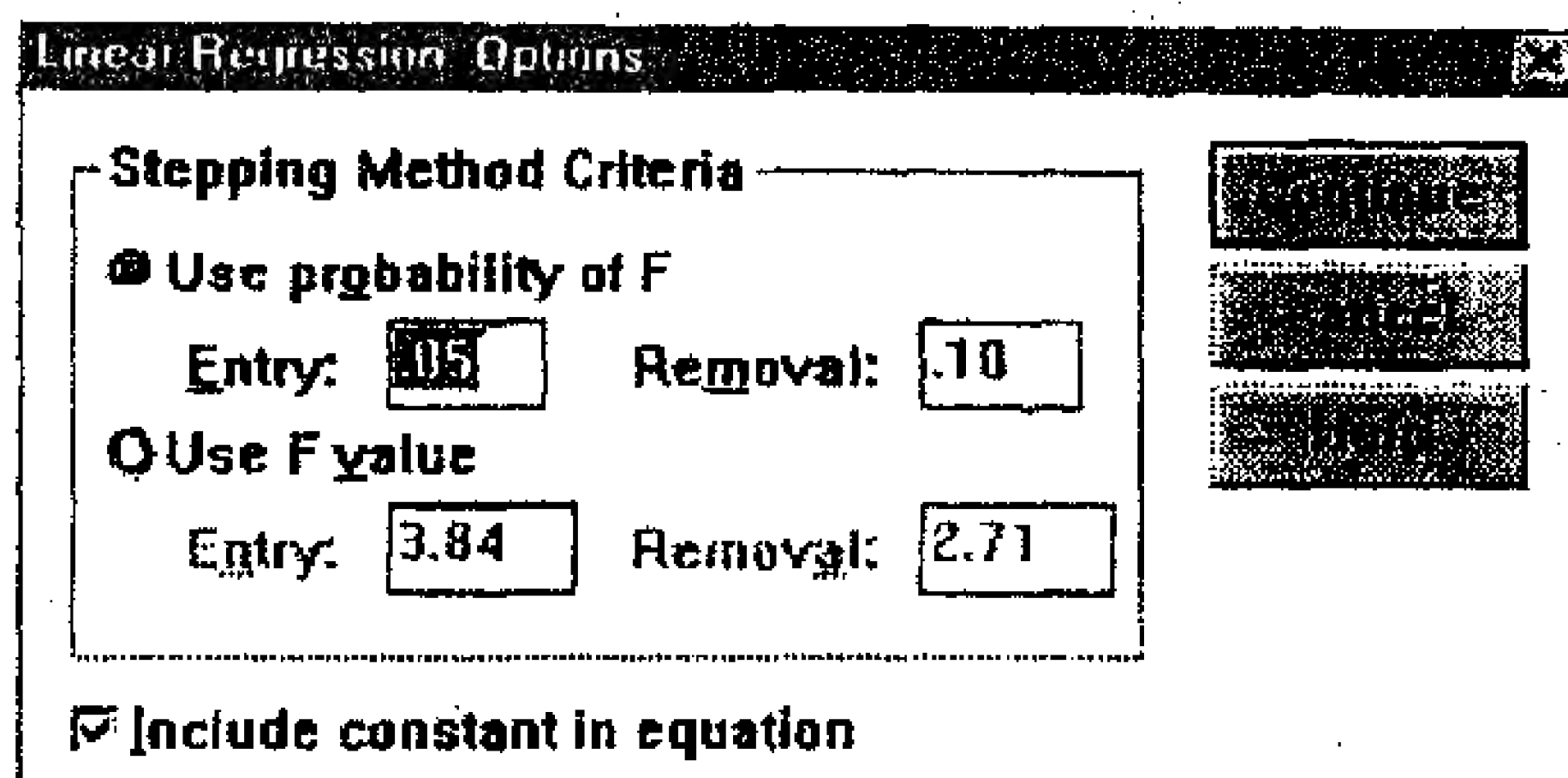


الشكل (10-25) مربع Linear Regression Statistics

4- إذا اخترت Descriptive فهذا لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل متغير بالإضافة إلى مصفوفة الارتباط .

(one tailed significance level and number of cases for each correlation)

5- اختر الأمر Options من الشاشة الأولى فيظهر مربع حوار Linear Options Regression كما في الشكل (10-26)



الشكل (10-26) مربع Linear Regression Options

6- إذا أردت المعادلة أن تظهر على الشاشة اختر الأمر Include constant in equation



7- انقر على OK وستظهر النتائج في شاشة المخرجات .

تمرين (4-10)

الجدول التالي يبين قيم المتغيرين  $Y, X$  .

X	70	60	70	80
Y	2	2	1	3

اعتمد ذلك لإيجاد :

1- معادلة الانحدار للتبوء بقيم  $Y$  إذا علمت  $X$  .

2- ارتباط بيرسون .

3- احفظ التمرين باسم Exer-4 بإتباع الطرق السابقة نحصل على معادلة الانحدار.

$$Y = -1.50 + 0.05X$$

معامل ارتباط بيرسون يساوي (0.5) كما هو في شاشة المخرجات .

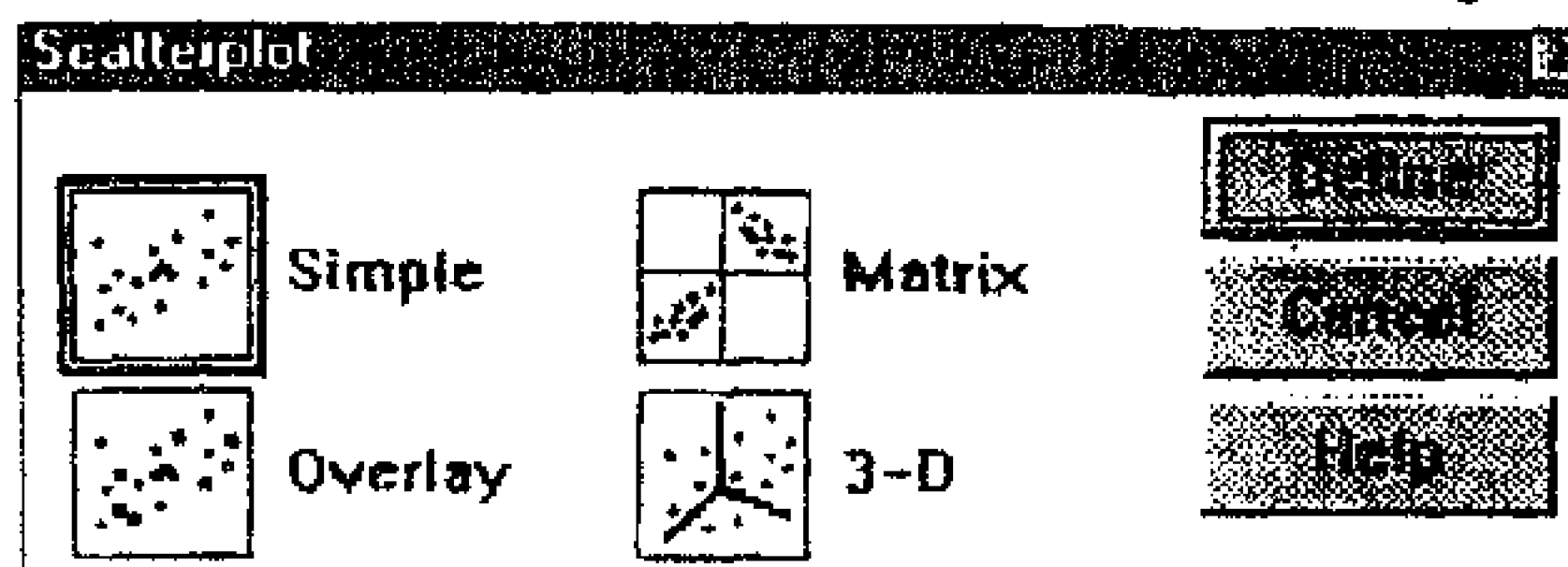
----- Variables in the Equation -----					
Variable	B	SE B	Beta	T	Sig T
X	.050000	.061237	.500000	.816	.5000
(Constant)	<u>-1.500000</u>	4.308422		-.348	.7610
End Block Number 1 All requested variables entered.					

X	Y
1.0000	.5000
( 4)	( 4)
P= .	P= .500
.5000	1.0000
( 4)	( 4)
P= .500	P= .

## 10-20 لتحديد شكل الانتشار Scatter

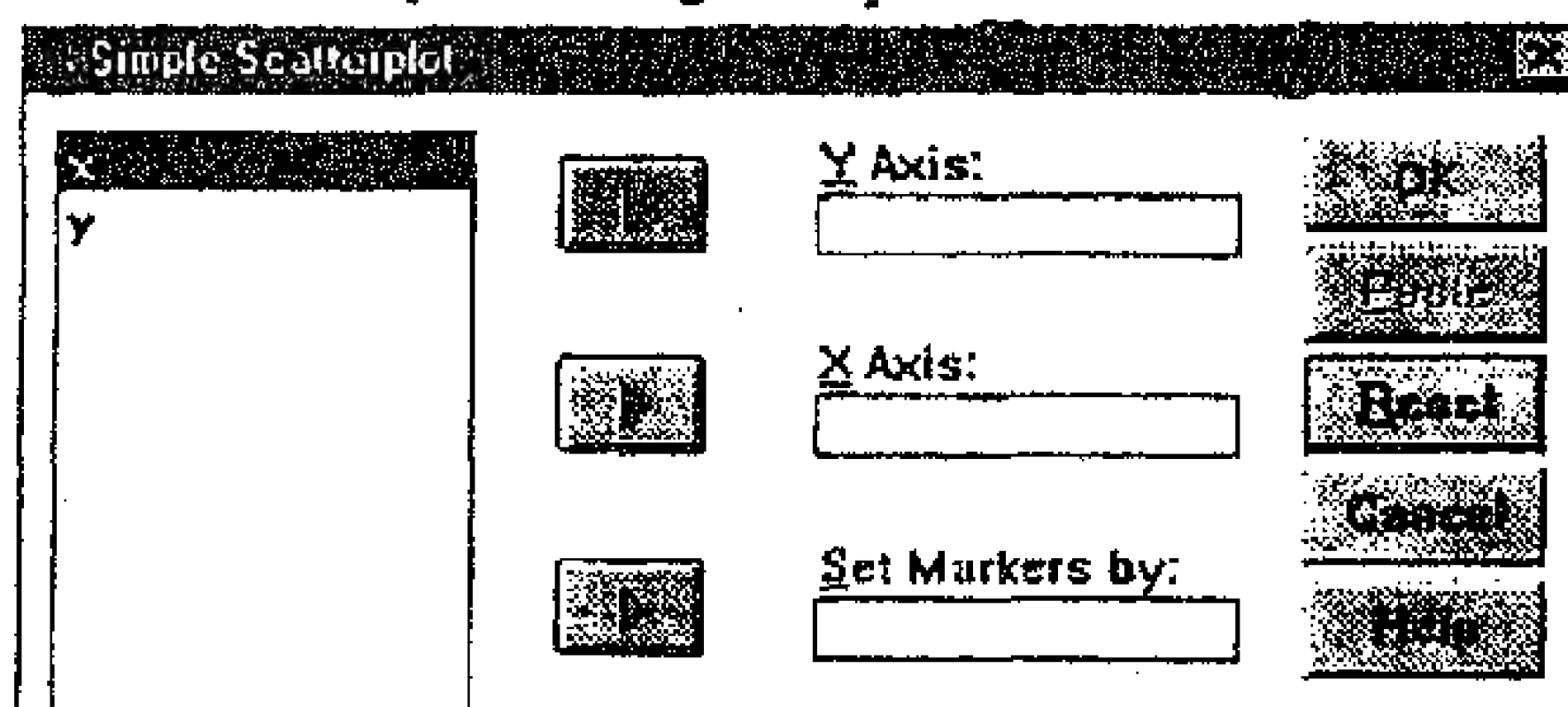
لتحديد شكل الانتشار افتح شاشة محرر البيانات واتبع ما يأتي :

1. انقر فوق الأمر Scatter من قائمة Graph فتظهر مربع حوار Scatterplot كما في الشكل (10-27)



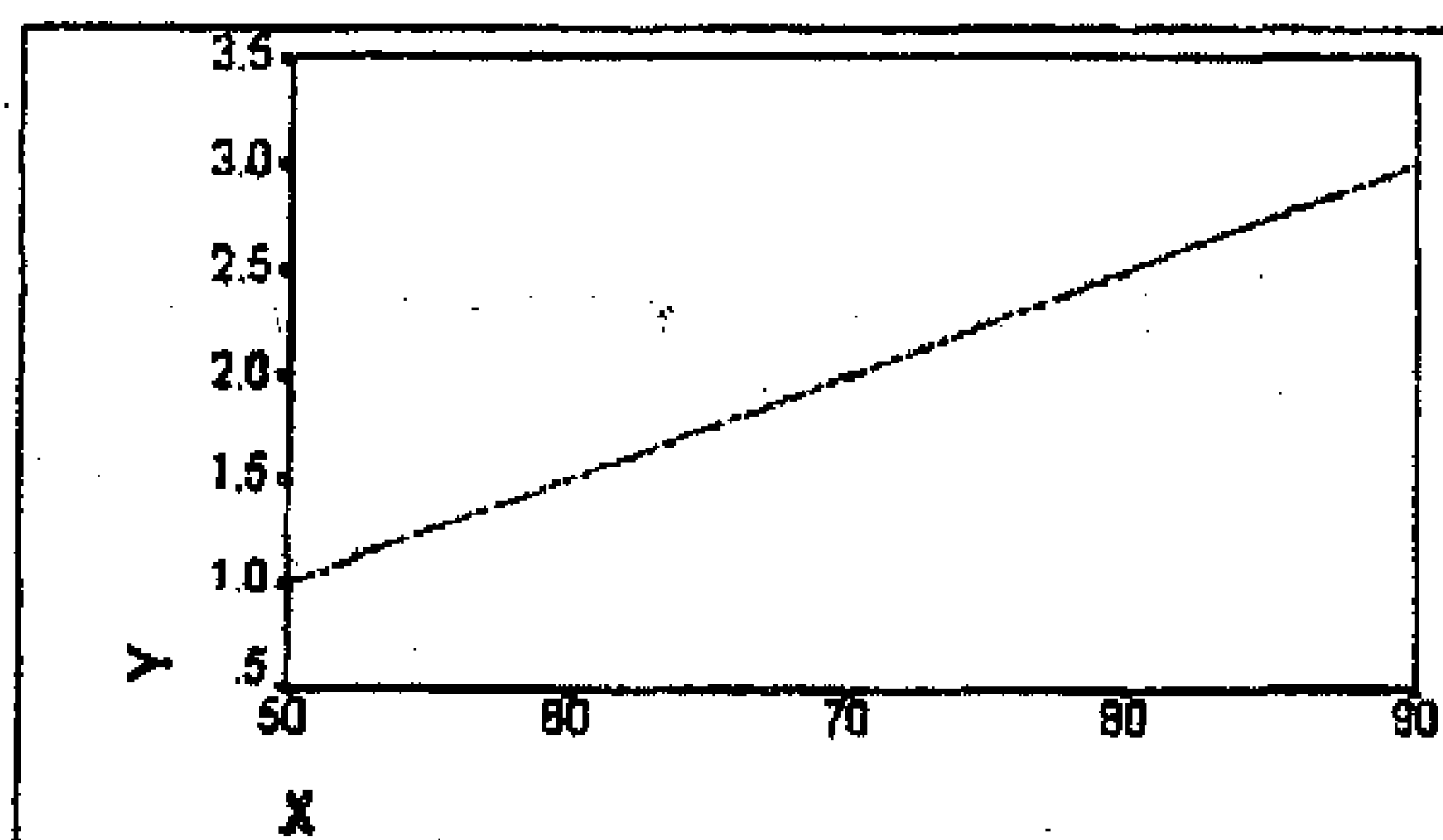
الشكل (10-27) مربع حوار Scatterplot

2. حدد نوع الانتشار الذي تريد وعادةً لختيار Simple ثم اختر Define فتظهر مربع حوار Simple Scatterplot كما في الشكل (10-28)



الشكل (10-28) مربع حوار Simple Scatterplot

3. حدد المتغيرات على المحاور ثم اختر موافق لتحصل على Chart counsel كما في الشكل (10-29)



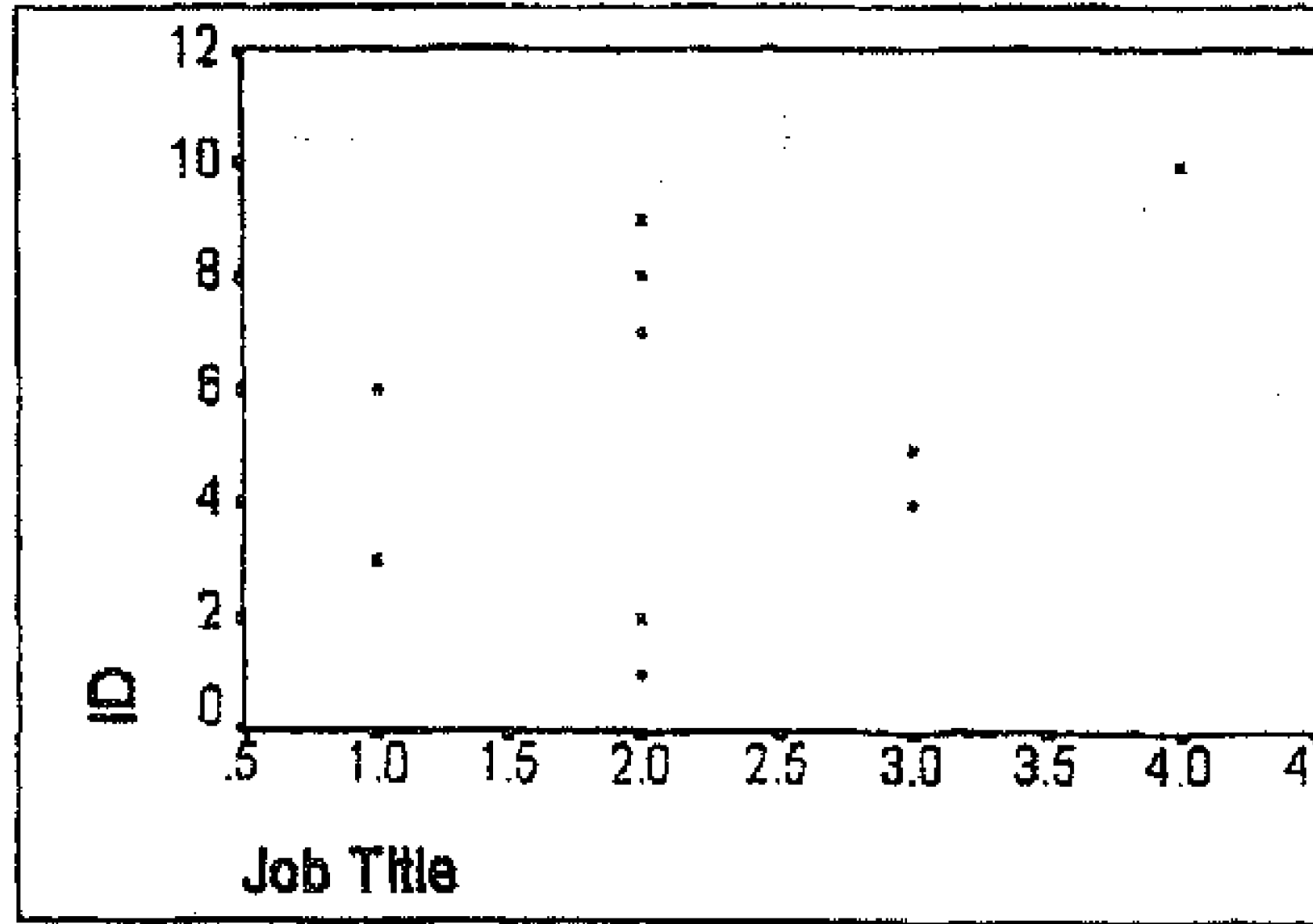
الشكل (10-29) شكل الانتشار في نافذة Chart counsel

## 10-21 إظهار خط الانحدار Showing Scatter Line

في العادة تحصل على النقاط الانتشار بدون خط الانحدار ولتوضيح كيفية إضافة خط الانحدار اتبع ما يلي:

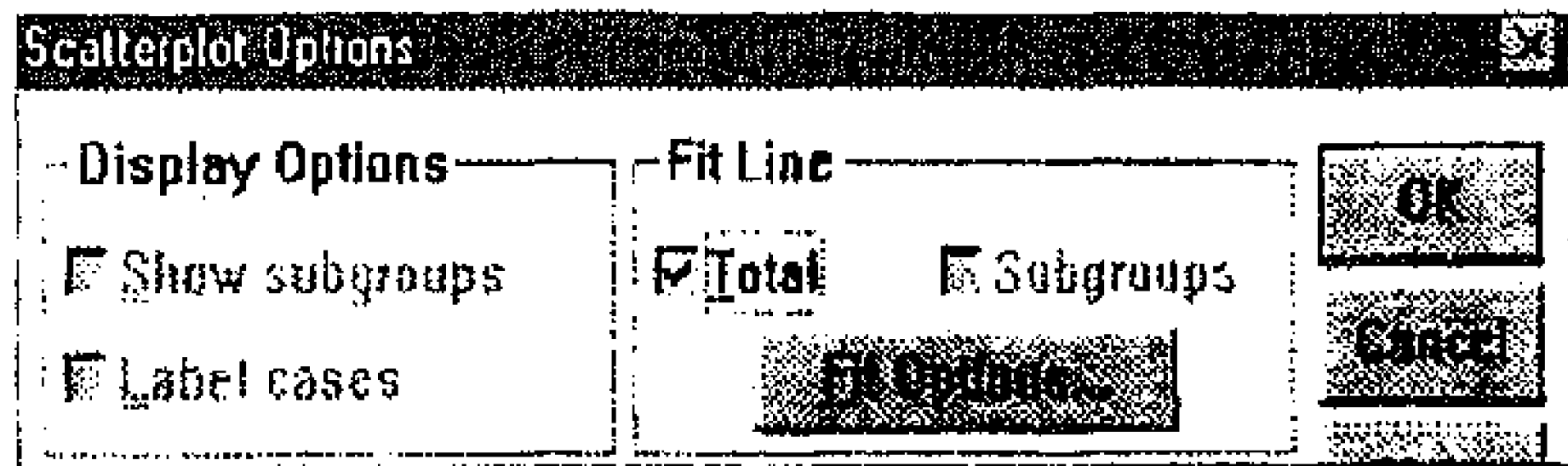
4. بعد إظهار نقاط الانتشار في شاشة Chart carousal. انقر على الزر Edit

للاتصال إلى نافذة Chart كما في الشكل (10-30)



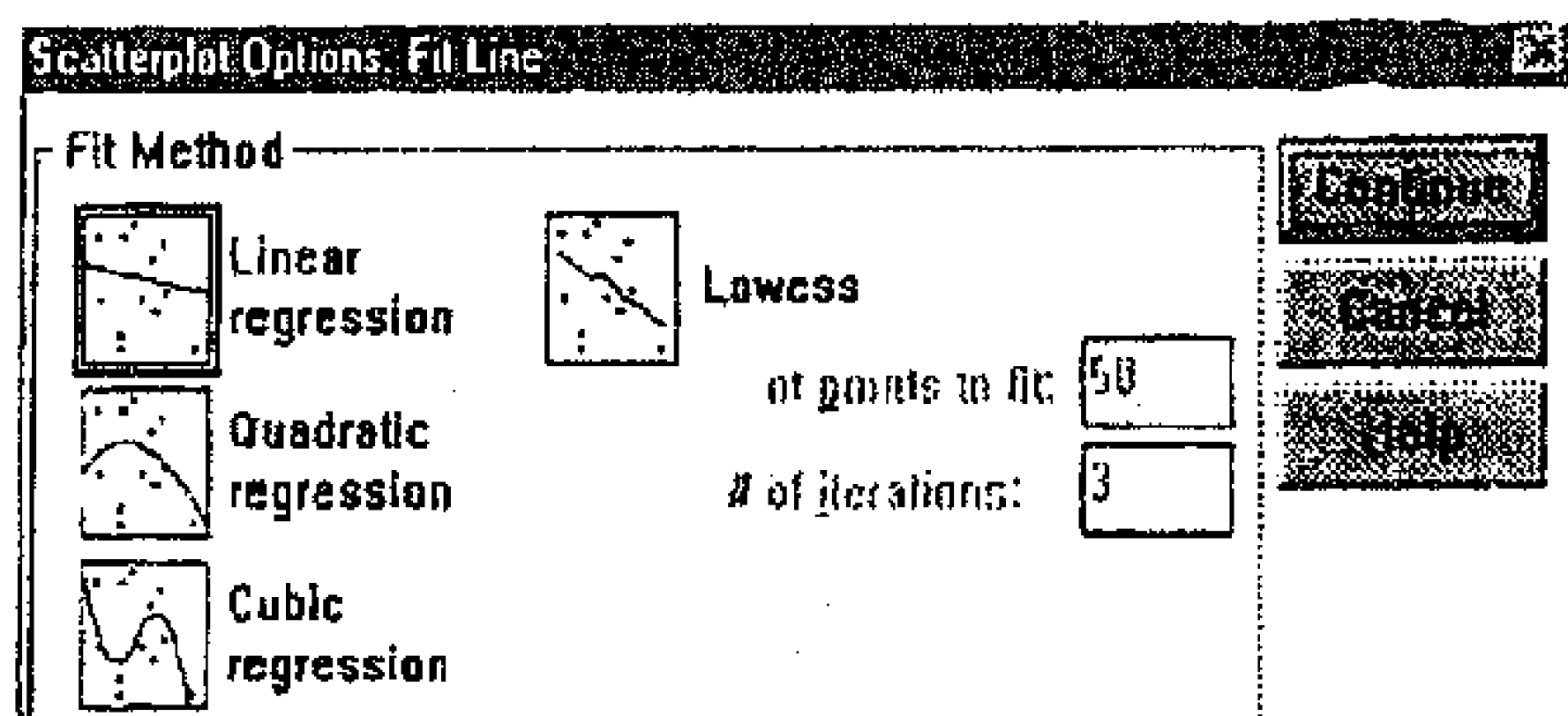
الشكل (10-30) نافذة Chart

1. أنقر فوق Options من قائمة Chart فيظهر مربع حوار Scatter Options كما في (10-31)



الشكل (10-31) مربع حوار Scatter Options

2- من مربع Fit line اختر مربع Total ثم أنقر على المربع Fit Options ليظهر مربع حوار Fit Line كما في الشكل (10-32)



الشكل (10-32) مربع حوار Fit Line



## التوزيع الزائدي Z. distribution

Z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
-3.5	0.00017	0.00017	0.00018	0.00019	0.00019	0.00020	0.00021	0.00022	0.00022	0.00023
-3.4	0.00024	0.00025	0.00026	0.00027	0.00028	0.00029	0.00030	0.00031	0.00033	0.00034
-3.3	0.00035	0.00036	0.00038	0.00039	0.00040	0.00042	0.00043	0.00045	0.00047	0.00048
-3.2	0.00050	0.00052	0.00054	0.00056	0.00058	0.00060	0.00062	0.00064	0.00066	0.00069
-3.1	0.00071	0.00074	0.00076	0.00079	0.00082	0.00085	0.00087	0.00090	0.00094	0.00097
-3.0	0.00100	0.00104	0.00107	0.00111	0.00114	0.00118	0.00122	0.00126	0.00131	0.00135
-2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0017	0.0018	0.0019
-2.8	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
-2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
-2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
-2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
-2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
-2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
-2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
-2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
-2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
-1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
-1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
-1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
-1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
-1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
-1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0806
-1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0966
-1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1057	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
-1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
-1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
-0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
-0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
-0.7	0.2148	0.2177	0.2207	0.2236	0.2266	0.2297	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
-0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
-0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
-0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
-0.3	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
-0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
-0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
-0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

## تابع التوزيع الزائ

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983



# التوزيع التائي t-distribution

درجات الحرية	الاحتمال						
	70	80	90	95	97.5	99	99.5
1	.73	1.38	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	.62	1.06	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	.58	.98	1.54	2.35	3.18	4.54	5.84
4	.57	.94	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	.56	.92	1.48	2.01	2.57	3.36	4.03
6	.55	.91	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	.55	.90	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	.55	.89	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	.54	.88	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	.54	.88	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	.54	.88	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	.54	.87	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06
13	.54	.87	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	.54	.87	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	.54	.87	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	.54	.86	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	.53	.86	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	.53	.86	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	.53	.86	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	.53	.86	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	.53	.86	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	.53	.86	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	.53	.86	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	.53	.86	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	.53	.86	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	.53	.86	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	.53	.86	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	.53	.86	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	.53	.85	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	.53	.85	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	.53	.85	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
50	.53	.85	1.30	1.67	2.01	2.40	2.68
60	.53	.85	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
80	.53	.85	1.29	1.66	1.99	2.37	2.64
100	.53	.84	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63
200	.52	.84	1.29	1.65	1.97	2.34	2.60
500	.52	.84	1.28	1.65	1.96	2.33	2.59
∞	.52	.84	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

## التوزيع الكائي $X^2$

	0.99	0.98	0.95	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20
1	0.00157	0.00288	0.00393	0.0158	0.0642	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	0.0201	0.0404	0.102	0.211	0.446	3.219	4.605	5.991	7.324	9.210	13.815
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341	16.268
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	5.989	7.779	9.488	11.564	13.277	18.465
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.341	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.375	5.578	6.989	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	25.033	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	10.196	11.293	13.097	14.848	17.187	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	12.194	13.409	15.379	17.292	19.820	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703

## التوزيع الفاني F. distribution

درجة الحرية	1-α	درجات الحرية											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.75	5.02	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.18	9.26	9.32	9.36	9.41
	.90	39.9	49.5	53.8	57.8	59.2	59.8	59.9	59.9	59.9	60.2	60.3	60.7
	.95	161	200	218	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	.99	161	200	218	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	.75	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39
	.90	3.53	4.00	4.16	4.24	4.28	4.33	4.35	4.37	4.38	4.39	4.40	4.41
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	.99	68.5	68.0	68.2	68.2	68.3	68.3	68.4	68.4	68.4	68.4	68.4	68.4
3	.75	2.02	2.28	2.38	2.43	2.45	2.46	2.47	2.48	2.48	2.49	2.49	2.49
	.90	3.54	4.00	4.16	4.24	4.28	4.33	4.35	4.37	4.38	4.39	4.40	4.41
	.95	16.1	16.5	16.7	16.7	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8	16.8
	.99	34.1	34.5	34.6	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7	34.7
4	.75	1.81	2.00	2.08	2.13	2.15	2.16	2.17	2.17	2.18	2.18	2.18	2.18
	.90	4.34	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.95	7.71	6.94	6.59	6.38	6.25	6.16	6.09	6.04	6.00	5.98	5.94	5.91
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4
5	.75	1.69	1.85	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.98	9.98
6	.75	1.62	1.78	1.79	1.79	1.79	1.79	1.79	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77
	.90	3.74	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	.95	5.98	5.14	4.76	4.53	4.39	4.29	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	.99	13.7	10.8	9.78	9.15	8.75	8.47	8.28	8.10	7.98	7.87	7.75	7.72
7	.75	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.69
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.45	7.18	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	.75	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.58	2.56	2.54	2.52	2.50
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.59	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
	.99	11.3	8.65	7.55	7.01	6.62	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	.75	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
	.90	3.26	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	.99	10.8	8.02	6.92	6.42	6.03	5.78	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	.75	1.48	1.59	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54
	.90	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	.99	10.0	7.36	6.25	5.75	5.36	5.10	4.93	4.80	4.69	4.60	4.52	4.41
11	.75	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.56	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51
	.90	3.23	2.86	2.67	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	.95	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.94	2.90	2.85	2.82	2.78
	.99	9.85	7.21	6.10	5.60	5.21	4.95	4.78	4.65	4.53	4.44	4.36	4.28
12	.75	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.68
	.99	9.33	6.69	5.58	5.07	4.68	4.42	4.25	4.12	4.00	3.91	3.83	3.75

## تابع التوزيع الفائق

												درجة الحرية	ا - ب
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	$\infty$		
9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.76	1
61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.90	
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.95	
3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.75	2
9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.90	
19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.95	
99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.99	3
2.46	2.48	2.48	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.75	
5.20	5.18	5.18	5.17	5.18	5.18	5.18	5.18	5.18	5.18	5.18	5.18	.90	
8.70	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.95	4
26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.99	
2.08	2.09	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.75	5
3.27	3.24	3.23	3.22	3.21	3.20	3.19	3.18	3.18	3.17	3.16	3.16	.90	
4.9	4.80	4.77	4.75	4.72	4.70	4.69	4.66	4.66	4.65	4.64	4.63	.95	
10.9	10.8	10.8	10.8	10.8	10.8	10.7	10.6	10.6	10.5	10.5	10.5	.99	6
1.24	1.21	1.19	1.17	1.16	1.15	1.14	1.13	1.12	1.12	1.11	1.10	.75	
4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.90	
9.72	9.58	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.95	7
1.76	1.78	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.75	
2.37	2.34	2.32	2.30	2.28	2.27	2.26	2.25	2.24	2.23	2.23	2.22	.90	
3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.95	8
7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.89	.99	
1.68	1.57	1.47	1.36	1.25	1.14	1.03	0.92	0.81	0.70	0.59	0.48	.75	9
2.83	2.59	2.38	2.18	1.98	1.78	1.58	1.38	1.18	0.98	0.78	0.58	.90	
3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.95	
8.31	8.16	8.07	7.99	7.91	7.86	7.82	7.75	7.74	7.70	7.67	7.65	.99	10
1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.75	
2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.90	
3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.95	11
5.52	5.38	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.99	
1.57	1.56	1.56	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.75	
2.34	2.30	2.28	2.26	2.25	2.24	2.23	2.21	2.19	2.18	2.17	2.16	.90	12
3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.73	2.73	2.73	2.72	2.71	.95	
4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.99	
1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49	1.48	1.48	.75	13
2.24	2.20	2.18	2.16	2.15	2.14	2.13	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	.90	
2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.95	
4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.99	14
1.50	1.49	1.48	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.75	
2.17	2.12	2.10	2.08	2.06	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.90	
2.72	2.66	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.95	15
4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60	.99	
1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.43	1.42	.75	
2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.90	16
2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.95	
4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.99	

# تابع التوزيع الفائي

درجات الحرية	1-α	درجات الحرية											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	.75	1.45	1.54	1.54	1.55	1.52	1.51	1.50	1.48	1.49	1.48	1.47	1.47
	.90	3.14	2.78	2.56	2.43	2.33	2.28	2.23	2.20	2.18	2.14	2.12	2.10
	.95	4.57	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	.99	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	.75	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.48	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45
	.90	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.06
	.95	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	.99	8.88	6.51	5.55	5.04	4.69	4.45	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.08	2.04	2.02
	.95	4.54	3.68	3.28	3.05	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	.99	8.63	6.26	5.30	4.80	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	.75	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44
	.90	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	.95	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	.99	8.53	6.23	5.28	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.79	3.69	3.62	3.56
17	.75	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.48	1.46	1.46	1.45	1.45	1.42	1.41
	.90	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.16	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	.95	4.45	3.58	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	.99	8.46	6.11	5.16	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	.75	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.46	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
	.90	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	.95	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	.99	8.28	6.01	5.06	4.56	4.23	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	.75	1.41	1.49	1.48	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40
	.90	2.98	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	.95	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	.99	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.35	3.30
20	.75	1.40	1.48	1.48	1.46	1.45	1.44	1.42	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
21	.75	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37
	.90	2.95	2.58	2.36	2.23	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	.95	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	.99	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	.75	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.37	1.37	1.36	1.35
	.90	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.89	1.86	1.84	1.81
	.95	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.38	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	.99	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.28	3.18	3.09	3.02	2.96
28	.75	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.38	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
	.90	2.89	2.50	2.29	2.15	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	.95	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	.99	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90

## تابع التوزيع الفاني

												$1-\alpha$	درجات الحرية
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	$\infty$		
1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.40	.75	13
2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.90	
2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.25	2.23	2.22	2.21	.95	
3.02	2.95	2.89	2.81	2.73	2.68	2.64	2.57	2.55	2.52	2.50	2.47	.99	
1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.38	.75	14
2.01	1.98	1.94	1.91	1.88	1.87	1.85	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80	.90	
2.48	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13	.95	
3.00	2.91	2.85	2.75	2.67	2.62	2.58	2.51	2.49	2.46	2.43	2.40	.99	
1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75	15
1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90	
2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.15	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95	
2.92	2.87	2.79	2.71	2.63	2.58	2.55	2.49	2.46	2.43	2.39	2.37	.99	
1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	.75	16
1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.75	1.74	1.73	1.72	.90	
2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01	.95	
2.87	2.80	2.73	2.65	2.57	2.52	2.49	2.43	2.40	2.37	2.33	2.31	.99	
1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	.75	17
1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.90	
2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.95	
2.81	2.73	2.66	2.58	2.50	2.45	2.42	2.36	2.33	2.30	2.26	2.24	.99	
1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.32	.75	18
1.88	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.90	
2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.95	
2.77	2.69	2.62	2.54	2.46	2.41	2.38	2.32	2.29	2.26	2.22	2.19	.99	
1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	.75	19
1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63	.90	
2.23	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	.95	
2.73	2.65	2.58	2.50	2.42	2.37	2.34	2.28	2.25	2.22	2.18	2.16	.99	
1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75	20
1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.90	
2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95	
2.69	2.61	2.54	2.46	2.38	2.33	2.30	2.24	2.21	2.18	2.14	2.12	.99	
1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	1.29	1.29	1.28	.75	21
1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.90	
2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.95	
2.65	2.57	2.50	2.42	2.34	2.29	2.26	2.20	2.17	2.14	2.10	2.07	.99	
1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75	22
1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90	
2.11	2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95	
2.61	2.53	2.46	2.38	2.30	2.25	2.22	2.16	2.13	2.10	2.06	2.03	.99	
1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	.75	23
1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.90	
2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.95	
2.57	2.49	2.42	2.34	2.26	2.21	2.18	2.12	2.09	2.06	2.02	1.99	.99	
1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.75	24
1.74	1.69	1.66	1.63	1.60	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.90	
2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.95	
2.53	2.45	2.38	2.30	2.22	2.17	2.14	2.08	2.05	2.02	1.98	1.95	.99	

## تابع التوزيع الفائي

درجات الحرية	$1 - \alpha$	درجات الحرية											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	.75	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34
	.90	2.88	2.48	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	.99	7.56	5.38	4.51	4.02	3.71	3.47	3.26	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	.75	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31
	.90	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	.95	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	.99	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
50	.75	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28
	.90	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	.95	7.09	4.98	4.10	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
	.99	7.09	4.98	4.10	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
120	.75	1.24	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	.95	3.52	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	.99	6.65	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	.75	1.23	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25
	.90	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	.95	3.69	3.24	2.85	2.62	2.46	2.34	2.26	2.19	2.13	2.08	2.04	2.00
	.99	6.78	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
$\infty$	.75	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

## تابع التوزيع الثاني

درجات الحرية												درجات الحرية	١٠٠
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞		
1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.75	30
1.72	1.57	1.54	1.51	1.57	1.53	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.90	
2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.78	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.95	
2.70	2.55	2.47	2.38	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.99	
1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	.75	40
1.68	1.51	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.90	
1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.68	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.95	
2.62	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.99	
1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.75	60
1.66	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.90	
1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.58	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.95	
2.55	2.30	2.22	2.03	1.94	1.89	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.99	
1.25	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.75	120
1.65	1.46	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.90	
1.75	1.65	1.51	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.29	1.25	.95	
2.19	2.03	1.95	1.85	1.75	1.70	1.66	1.58	1.55	1.53	1.48	1.45	.99	
1.23	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.12	1.11	1.10	1.09	1.08	1.08	.75	200
1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.90	
1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.95	
2.10	1.97	1.88	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.99	
1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.75	∞
1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.90	
1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.95	
2.04	1.88	1.78	1.70	1.59	1.52	1.47	1.35	1.32	1.25	1.15	1.00	.99	



### المراجع العربية

- (1) علم الإحصاء الوصفي المبرمج دعوض منصور وعزام صبري.
- (2) أساسيات علم الإحصاء الوصفي دعوض منصور-عزام صبري- دعلي قوقزة.
- (3) مبادئ الإحصاء عوض منصور وعزام صبري
- (4) الإحصاء في التربية عزام صبري وآخرون.
- (5) أسس علم الإحصاء عزام صبري وعلي أبو شرار

كتابخه تربويه



Educational books

Telegram : [t.me/edubook](https://t.me/edubook)



# الاحصاء التطبيقي بنظام

# SPSS

Bibliotheca Alexandrina



1241126



9 789957 593476

دار المنهجية

الدار المنهجية للنشر والتوزيع

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري

تلفاكس: +962 6 4611169

E-mail: info@Almanhajiah.com

ص.ب: 922762 عمان 11192 الأردن